Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

2. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure I
im Wintersemester 2016/17

Abgabe: Donnerstag, den 17.11.2016 vor der Vorlesung.

Aufgabe 2.1. (5 Punkte)
Seien $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ gegeben.
Zeigen Sie, dass

(a) $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist. (Diese Basis wird „kanonische Basis“ genannt.)

(b) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ keine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

(c) $\{\vec{i}, \vec{x}_1\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

(d) es im $\mathbb{R}^2$ unendlich viele Basen gibt.

(e) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ ist.

Aufgabe 2.2. (1 + 2 + 2 + 1 = 6 Punkte)
Gegeben sei die Menge

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei der Menge um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ handelt.

(b) Bestimmen Sie die Dimension dieses Unterraumes und geben Sie eine Basis des Unterraumes an.

(c) Stellen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ als Linearkombinationen dieser Basis dar, falls dies möglich ist.

(d) Was stellt die Menge geometrisch dar?

Aufgabe 2.3. (3 Punkte)
Betrachten Sie den Vektorraum der Polynome $\mathbb{P}_n = \{p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n, \ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$.
Zeigen Sie, dass die Polynome

$$p_1(x) = x - 1, \ p_2(x) = x^3 + 5x \text{ und } p_3(x) = x^3 + 2$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 2.4. (1.5 + 3 + 1.5 = 6 Punkte)

(a) Begründen Sie, weshalb eine Menge $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ aus beliebigen Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ linear abhängig sein muss.

(b) Zeigen Sie, dass $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit den Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

eine Orthonormalbasis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $x = (3, 1, -1)^\top$ bezüglich der Orthonormalbasis V aus Aufgabenteil b).