



3. Übung zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure I im Wintersemester 2016/17

Abgabe: Donnerstag, den 24.11.2016 vor der Vorlesung.

Aufgabe 3.1. (1.5 + 3 + 0.5 = 5 Punkte)

Berechnen Sie

- (a) die Längen der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 - 12\sqrt{3} \\ 4 + 3\sqrt{3} \\ -12 + 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

- (b) und die Winkel zwischen diesen Vektoren.
(c) Machen Sie eine Aussage über die geometrische Lage der Vektoren zueinander.

Aufgabe 3.2. (1.5 + 1.5 + 2 = 5 Punkte)

Gegeben sei der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, die

- (a) mit v das Skalarprodukt zwei haben.
(b) zu v den Abstand $r = 2$ haben
(c) mit v den Winkel 60° einschließen.

Aufgabe 3.3. (6 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes des Pythagoras den Cosinussatz der ebenen Trigonometrie. Ist der Satz für alle Winkel $0 < \varphi < \pi$ anwendbar?

Zeigen Sie dann mit dem Cosinussatz, dass sich der Winkel zwischen den Vektoren x_1 und x_2 durch die Beziehung

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\|x_1\| \|x_2\|}$$

berechnen lässt, wobei mit $\langle x_1, x_2 \rangle$ das Skalarprodukt definiert ist.

Aufgabe 3.4. (1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 7 Punkte)

zur Veranschaulichung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in \mathbb{R}^2

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Gegeben seien die Vektoren $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- (a) Berechnen Sie

$$u = x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y,$$

wobei das Standardskalarprodukt $\langle x, y \rangle$ auf \mathbb{R}^2 und $\|\cdot\|$ die zugehörigen Norm ist.

- (b) Veranschaulichen Sie sich die Vektoren $x, y, \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$ und u in einem Bild (maßstabsgetreu!)
- (c) Veranschaulichen Sie in dem Bild aus b) (ebenfalls maßstabsgetreu!) auch die Rechteck-Flächen (siehe Skizze)

$$A = \left\| \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\| \cdot \|y\|$$

$$B = \|x\| \|y\|$$

- (d) Zeigen Sie, dass für den “Rest” der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$C = B - A = \|x\| \|y\| - \langle x, y \rangle,$$

gilt und zeichnen Sie diese Fläche ebenfalls in das Bild ein.

- (e) Berechnen Sie

$$\|u\| \|y\|$$

Zeichnen Sie die Fläche ebenfalls in das Bild ein. Welcher Zusammenhang besteht mit dem Rest? Welche Lage haben x und y zueinander, wenn u kleiner oder sogar null wird?

Hinweis: Skizze

