



5. Übung zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure I im Wintersemester 2016/17

Abgabe: Donnerstag, den 08.12.2016 vor der Vorlesung.

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)

Gegeben sind die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie folgende Rechenoperationen (soweit möglich) durch

- (a) $A + B$
- (b) $A^\top + B$
- (c) $A - 2B^\top$
- (d) AC
- (e) CA

Aufgabe 5.2. (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung X der Gleichung $AX + A^\top X = B$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.3. (2 + 2 + 3 = 7 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ -\cos(x) & \sin(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gehen Sie bei $|C|$ möglichst geschickt vor.

Aufgabe 5.4. (2 + 2 = 4 Punkte)

Sei α der von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ eingeschlossene Winkel.

- (a) Zeigen Sie die folgende Rechenregel mit Hilfe den Ihnen bereits bekannten Zusammenhängen

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|,$$

wobei $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$.

- (b) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt $\left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|$ hat.