Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

8. Übung zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure I
im Wintersemester 2016/17

Abgabe: Donnerstag, den 12.01.2017 vor der Vorlesung.

Aufgabe 8.1. (2 + 5 = 7 Punkte)

(a) Überprüfen Sie die nachstehende Folge von Vektoren auf Konvergenz

$$\{a^n\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4n^2+\sqrt[n]{n}}{2n^2+1} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge reeller Zahlen

$$a_1 := 10, \quad a_{n+1} := \sqrt{20 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten durch 5 beschränkt ist.

Aufgabe 8.2. (2 + 5 + 2 = 9 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(b) Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge reeller Zahlen

$$a_1 := 0, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 1}{2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben durch 1 beschränkt ist. Beweisen Sie anschließdend die Konvergenz der Folge und berechnen Sie den Grenzwert.

(c) Begründen Sie, dass die rekursive Folge reeller Zahlen

$$a_1 := 2, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 1}{2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

nicht konvergiert.

Aufgabe 8.3. (2 + 2 = 4 Punkte)

Die Schaumhöhe in einem Bierglas betrage n Sekunden nach dem Eingießen $h_n = 4 \cdot 0,992^n$ cm.

(a) Zeigen Sie mithilfe von Definition 1, dass $\{h_n\}$ eine Nullfolge ist.

(b) Berechnen Sie, nach wievielen Sekunden die Schaumhöhe unter

(i) 2 cm,
(ii) 1 cm
(iii) 0, 5 cm
(iv) 0, 1 cm

gefallen ist.