Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b$, $n \in \mathbb{N}$ gerade und f ein Polynom vom Grad $n+1$.

Definiere

$$(\tilde{x}_i)_{i=0}^n = \left(-1 + \frac{2}{n} i\right)_{i=0}^n$$
$$(x_i)_{i=0}^n = \left(a + \frac{b-a}{n} i\right)_{i=0}^n .$$

Dann gilt

$$(x_i)_{i=0}^n = \left(\frac{b-a}{2}\tilde{x}_i + \frac{b+a}{2}\right)_{i=0}^n .$$

Es folgt außerdem direkt, dass $\tilde{x}_{\frac{n}{2}} = 0$ und

$$(\tilde{x}_i)_{i=0}^n = (-\tilde{x}_{n-i})_{i=0}^n.$$

Da f ein Polynom vom Grad $n+1$ ist, gibt es ein Polynom $\tilde{f}$ vom Grad $n+1$ mit

$$\tilde{f}(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Es folgt, dass es ein $\tilde{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein Polynom $\tilde{r}$ vom Grad n gibt mit

$$\tilde{f}(t) = \tilde{c}t^{n+1} + \tilde{r}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mit den obigen Definitionen ergibt sich direkt:

$$\tilde{f}(\tilde{x}_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Mit diesen Vorbereitungen gilt:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right) \\
&= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{c}t^{n+1}+\tilde{r}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{b-a}{2}\underbrace{\int_{-1}^{1}\tilde{c}t^{n+1}\,\mathrm{d}t}_{=0,\text{ da } n \text{ gerade}} + \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{r}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n}\tilde{r}(\tilde{x}_i) \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n}\tilde{r}(\tilde{x}_i) + (b-a)\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_i\tilde{c}\underbrace{\left((\tilde{x}_i)^{n+1}+(\tilde{x}_{n-i})^{n+1}\right)}_{=0} + \tilde{c}a_{\frac{n}{2}}(\underbrace{\tilde{x}_{\frac{n}{2}}}_{=0})^{n+1} \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n} a_i\left(\tilde{c}(\tilde{x}_i)^{n+1}+\tilde{r}(\tilde{x}_i)\right) = (b-a)\sum_{i=0}^{n}\tilde{f}(\tilde{x}_i) \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)
\end{aligned}
$$