Polarkoordinaten

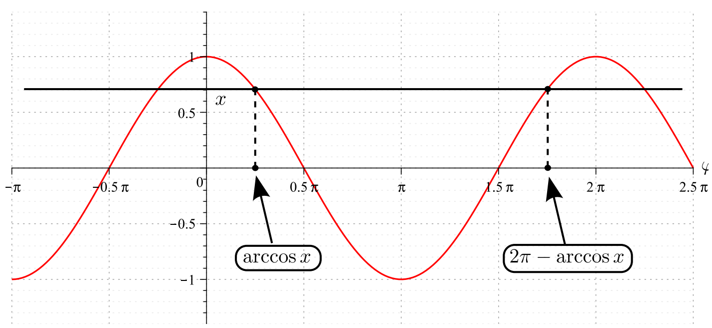
Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ kann durch die Länge $|z|$ des zugehörigen Vektors und dem von diesem Vektor und der positiven reellen Halbachse eingeschlossenen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig beschrieben werden. Man nennt φ **das Argument** von z. Es gilt also $z = \text{Re } z + i \,\text{Im } z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Diese Darstellung heißt Polardarstellung von z. Man kann φ durch die Formeln

$$\cos\varphi = \frac{\text{Re } z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{\text{Im } z}{|z|}$$

bestimmen.

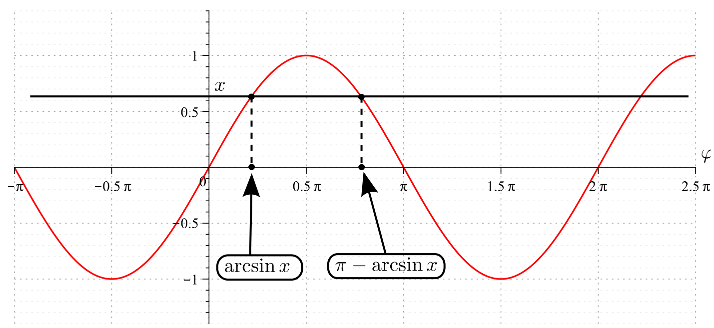
Gleichungen $\cos\varphi = x$ und $\sin\varphi = x$

(cos): Gegeben sei eine Zahl $x \in [-1, 1]$. Gesucht ist $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\cos\varphi = x$. Wir benutzen die Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Man erkennt:



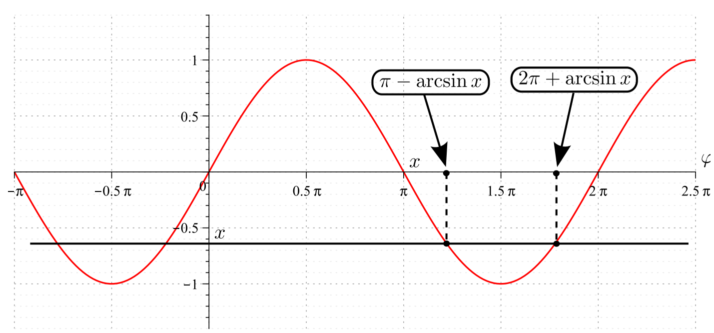
$$\left.\begin{array}{r} \cos\varphi = x \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{array}\right\} \iff (\varphi = \arccos x \quad \text{oder} \quad \varphi = 2\pi - \arccos x).$$

(sin): Gegeben sei eine Zahl $x \in [-1, 1]$. Gesucht ist $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\sin\varphi = x$. Wir benutzen die Umkehrfunktion $\arcsin : [1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Eine Fallunterscheidung ist notwendig:



$x \geq 0$:

$$\left.\begin{array}{r}\sin\varphi = x\\ \varphi \in [0, 2\pi)\end{array}\right\} \Longleftrightarrow (\varphi = \arcsin x \quad \text{oder} \quad \varphi = \pi - \arcsin x).$$



$x < 0$:

$$\left.\begin{array}{r}\sin\varphi = x\\ \varphi \in [0, 2\pi)\end{array}\right\} \Longleftrightarrow (\varphi = \pi - \arcsin x \quad \text{oder} \quad \varphi = 2\pi + \arcsin x).$$