Verfahren (Berechnung der Inversen Matrix)
Schritt 1: Zunächst schreibt man die zu invertierende Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die Einheitsmatrix nebeneinander in eine Doppelmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Anschließend versucht man, solgange elementare Zeilenumformungen durchzuführen, bis auf der linken Seite eine obere Dreiecksmatrix steht (d.h. alle Einträge unterhalb der Diagonalen Null sind):

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} d_1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n & * & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

Schritt 3: Ist bei dieser oberen Dreiecksmatrix mindestens ein Diagonaleintrag $d_i = 0$, so ist A nicht invertierbar. Sind jedoch alle Diagonaleinträge in der oberen Dreiecksmatrix $\neq 0$, so ist A invertierbar.
Schritt 4: Durch weitere elementare Zeilenumformungen kann man dann erreichen, dass auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Die Matrix

$$B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

auf der rechten Seite ist dann die Inverse von A.
Beispiel:

(a) Es sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben. Wir prüfen nun, ob A invertierbar ist und bestimmen gegebenenfalls die Inverse A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left[\begin{array}{rcr} & & \\ (II) & \rightarrow & 3(II) - 2(I) \\ (III) & \rightarrow & (III) + (I) \end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Da auf der linken Seite eine obere Dreiecksmatrix steht, deren Diagonaleinträge alle $\neq 0$ sind, ist A invertierbar und wir können fortfahren.

$$\begin{bmatrix} (I) & \to & (I)-(III) \\ (II) & \to & (II)-(III) \\ & & \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{bmatrix} (I) & \to & 2(I)+(II) \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} -6 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{bmatrix} (I) & \to & -\frac{1}{6}(I) \\ (II) & \to & -\frac{1}{2}(II) \\ (III) & \to & \frac{1}{2}(III) \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Somit ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Beispielsweise das LGS $Ax = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat daher die eindeutige Lösung

$$x = A^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wir gehen wie in (a) vor:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ (II) & \to & (II)-3(I) \\ (III) & \to & (III)+(I) \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ (III) & \to & (III)-(II) \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Da nun links eine obere Dreiecksmatrix erzeugt wurde und eine 0 auf der Diagonalen steht, ist A nicht invertierbar.