Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
WS 2015-2016

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte)

(a) Gegeben seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Welche der Matrixprodukte uv, $u^\top v$, $uv^\top$ und $u^\top v^\top$ sind definiert? Berechnen Sie gegebenenfalls die Produkte.

(b) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 9 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, zwei dieser Matrizen miteinander zu multiplizieren (beachten Sie, dass eine Matrix auch mit sich selbst multipliziert werden kann). Berechnen Sie die Produkte AB und BC.

Aufgabe 2 (3+1+1=5 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und berechnen Sie die inverse Matrix. Lösen Sie dann die linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = c$ mit den rechten Seiten $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

(a) Betrachten Sie die beiden (2×2)-Matrizen $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie die zugehörigen linearen Abbildungen

$$f_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_P(x) = Px \quad \text{und} \quad f_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_S(x) = Sx.$$

(i) Beschreiben Sie die Wirkungsweise von f_P und f_S geometrisch.

(ii) Berechnen Sie die Matrizen PP, SS, PS und SP und beschreiben Sie die Wirkungsweise der zugehörigen linearen Abbildungen.

(b) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{17} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Weiter sei ein Vektor $c \in \mathbb{R}^4$ gegeben und es seien $x, y \in \mathbb{R}^4$ (unbekannte) Vektoren mit

$$Ax = c = By.$$

Kann man anhand dieser Angaben die Vektoren x bzw. y eindeutig bestimmen?
Hinweis: Sie brauchen *keine* explizite Formel für x bzw. y zu finden.

Aufgabe 4 (3+3=6 Punkte)

Betrachtet werden die folgenden linearen Abbildungen $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $f_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad f_B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrizen A und B an, mit denen sich diese Abbildungen beschreiben lassen. Ist die Abbildung f_A bzw. f_B invertierbar?

(b) Gegeben sind zusätzlich die Vektoren

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Sind die Gleichungen $f_A(x) = c$, $f_A(x) = d$, $f_B(x) = c$ und $f_B(x) = d$ lösbar, und wenn ja, wie viele Lösungen besitzen sie? Sie brauchen die Lösung(en) nicht in allen Fällen explizit zu berechnen.

Abgabetermin: 27.11.2015 vor der Vorlesung.