



Mathematik für Studierende der Biologie
und des Lehramtes Chemie
WS 2015-2016

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (2+5=7 Punkte)

(a) Zeigen Sie die folgenden Identitäten

$$(i) \frac{10}{9} = 1.111111111\dots, \quad (ii) \frac{815}{99} = 8.23232323\dots,$$

$$(iii) \frac{1004}{999} = 1.005005005\dots, \quad (iv) 2 = 1.999999999\dots$$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(i) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+3}{k^3-k^2}, \quad (ii) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2+2}{m^4+4}, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{2^n}$$

$$(iv) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m-3}{m^2}, \quad (v) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2^k}{k+3^k}.$$

Hinweise zu Teil (b):

- In (i) können Sie verwenden, dass $2k^2 \leq k^3$ ist für $k \geq 2$ und diese Abschätzung nutzen, um den Nenner durch einen einfacheren Ausdruck zu ersetzen. Etwas Ähnliches können Sie auch im Zähler tun. Dieselbe Technik kann Ihnen auch bei den anderen Reihen helfen.
- Generell ist es bei vielen Reihen hilfreich, das Vergleichskriterium einzusetzen.
- In (v) bietet es sich an, mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ zu vergleichen.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Geben Sie den größten Definitionsbereich $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ der Funktionen

$$f : \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto c a^x,$$
$$g : \mathbb{D}_g \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto c \log_a x$$

an und bestimmen Sie für die Fälle

$$(i) \quad c < 0, a > 1, \quad (ii) \quad c > 0, 0 < a < 1$$

den Wertebereich. Skizzieren Sie jeweils den Funktionsgraphen.

Aufgabe 3 (2+1+2+1+1=7 Punkte)

Eine Bakterienkultur besteht zu Anfang aus 20 000 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 20 Minuten.

- (a) Die Anzahl der Bakterien C zur Zeit t lässt sich (näherungsweise) durch eine Funktion der Form

$$C(t) = C_0 a^t$$

beschreiben. Die Zeit t soll dabei in Minuten angegeben werden. Bestimmen Sie a und C_0 .

- (b) Wie viele Bakterien sind nach 5 Minuten bzw. nach 3 Stunden vorhanden?
- (c) Wann wird die Anzahl der Bakterien auf den Wert 10^8 gestiegen sein?
- (d) Die Bakterien leben in eine Flasche. Man sieht, dass genau um 12 Uhr die Bakterienanzahl 10^8 und die Flasche halbvoll ist. Um wie viel Uhr ist die Flasche voll?
- (e) Um 12:10 haben die Bakterien eine leere Flasche gefunden, die genauso groß ist wie die, die sie jetzt haben. Um wie viel Uhr ist die neue Flasche voll?

Aufgabe 4 (1+1+1+1+1=5 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, falls diese existieren:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 8x}{(x+2)^2}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 5x}{4x^3 + 7x^2 + 5x}, \quad (c) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(\frac{x^4 + 2}{x^3 + 5} \right),$$
$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^x + \cos \left(\frac{2\pi x + 3}{x-2} \right) \right), \quad (e) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \exp \exp \exp (-x^2).$$

Bemerkung: Sie dürfen verwenden, dass die Grenzwertsätze für Funktionen in Analogie zu den Grenzwertsätzen für Folgen gelten.

Aufgabe 5 (1+1+1+1+1=5 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches:

(a)

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

(b)

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad |x| = x(2H(x) - 1),$$

(c)

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = H(\sin x),$$

(d)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & 0 < x < \pi \\ x, & x \geq \pi \end{cases},$$

(e)

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-2}), & x > 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 6 (1+1+1+1+2+2=8 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f_1(x) &= \frac{\exp x}{x^2}, & \text{(b)} \quad f_2(x) &= \log(x \exp x), & \text{(c)} \quad f_3(x) &= \tan^2(x), \\ \text{(d)} \quad f_4(x) &= \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}}, & \text{(e)} \quad f_5(x) &= 2^x(3 - 9x - \sin \cos x), & \text{(f)} \quad f_6(x) &= (8x)^{9x}. \end{aligned}$$

Abgabetermin: 29.01.2016 vor der Vorlesung.