Bekannte Grenzwerte

- Für ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ vom Grad n gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to y} p(x) &= p(y), \quad \text{wenn } y \in \mathbb{R} \\
\lim_{x\to \infty} p(x) &= \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_n < 0 \end{cases} \\
\lim_{x\to -\infty} p(x) &= \begin{cases} -\infty, & \text{falls } a_n > 0 \text{ und } n \text{ ungerade} \\ \infty, & \text{falls } a_n > 0 \text{ und } n \text{ gerade} \\ \infty, & \text{falls } a_n < 0 \text{ und } n \text{ ungerade} \\ -\infty, & \text{falls } a_n < 0 \text{ und } n \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

- Für eine feste Zahl $y > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to z} y^x &= y^z, \quad \text{wenn } z \in \mathbb{R} \\
\lim_{x\to \infty} y^x &= \begin{cases} \infty, & \text{falls } y > 1 \\ 1, & \text{falls } y = 1 \\ 0, & \text{falls } y < 1 \end{cases} \\
\lim_{x\to -\infty} y^x &= \begin{cases} 0, & \text{falls } y > 1 \\ 1, & \text{falls } y = 1 \\ \infty, & \text{falls } y < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

- Für eine feste Zahl $y > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to z} \log_y x &= \log_y z, \quad \text{wenn } z \in (0,\infty) \\
\lim_{x\to \infty} \log_y x &= \begin{cases} \infty, & \text{falls } y > 1 \\ -\infty, & \text{falls } y < 1 \end{cases} \\
\lim_{x\to 0} \log_y x &= \begin{cases} -\infty, & \text{falls } y > 1 \\ \infty, & \text{falls } y < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

- Es gilt: $\lim\limits_{x\to y} \sin x = \sin y$ und $\lim\limits_{x\to y} \cos x = \cos y$ für alle $y \in \mathbb{R}$.
  Die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sin x$ und $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \cos x$ existieren nicht.

- Es gilt: $\lim\limits_{x\to y} \tan x = \tan y$ für $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.
  Zusätslich gilt $\lim\limits_{x\to \pm\frac{\pi}{2}+2k\pi} = \pm\infty$.

Es stellt sich heraus, dass sich die bekannten Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen auf Grenzwerte von Funktionen übertragen.

Satz (Grenzwertsätze für Funktionen)
Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ in D approximierbar und es gelte $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d$. Dann gilt:

(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = c + d$ (wenn $c + d$ Sinn hat, vgl. die Tabelle für Grenzwertsätze).

(b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = cd$ (wenn cd Sinn hat, vgl. die Tabelle für Grenzwertsätze).

(c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{c}{d}$ (wenn $\frac{c}{d}$ Sinn hat, vgl. die Tabelle für Grenzwertsätze).

(d) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$, so folgt $c \leq d$.

(e) Gilt $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ und ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$, so folgt $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

(f) "Kettenregel" für Grenzwerte:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ und } \lim_{x\to b} g(x) = c\right) \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

Beispiele:

(i) Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}.$$

Für den Punkt -1 gilt

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-3}{x-1} = 2.$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert nicht, da

$$\lim_{n\to\infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

(ii) Wir wollen $\lim\limits_{x\to\infty} \exp\left(-x^2 + x\right)$ zu bestimmen. Aus $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-x^2 + x\right) = -\infty$ und $\lim\limits_{y\to -\infty} \exp(y) = 0$ sowie der Kettenregel für Grenzwerte erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \exp\left(-x^2 + x\right) = 0.$$