Grenzwertsätze

Die folgenden Regeln ermöglichen ein weitergehendes Rechnen mit Grenzwerten. Man beachte, das einige dieser Regeln nur unter bestimmten Zusatzvoraussetzungen gelten. Es gibt auch Situationen, in denen keine allgemeine Aussage möglich ist. Diese Fälle sind mit '**?**' gekennzeichnet.

Summen und Differenzen

Voraussetzungen		mögliche Folgerungen	
$(a_n)_n$ konvergiert gegen	$(b_n)_n$ konvergiert gegen	$(a_n+b_n)_n$ konvergiert gegen	$(a_n-b_n)_n$ konvergiert gegen
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	$a+b$	$a-b$
$\pm\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
∞	∞	∞	**?**
∞	$-\infty$	**?**	∞
$-\infty$	∞	**?**	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**

Skalare Vielfache

Voraussetzungen		mögliche Folgerungen
$(a_n)_n$ konvergiert gegen	$\lambda \in \mathbb{R}$ fest	$(\lambda a_n)_n$ konvergiert gegen
$a \in \mathbb{R}$		λa
$\pm\infty$	>0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	<0	$\mp\infty$
$\pm\infty$	$=0$	0

Produkte

Voraussetzungen		mögliche Folgerungen
$(a_n)_n$ konvergiert gegen	$(b_n)_n$ konvergiert gegen	$(a_n b_n)_n$ konvergiert gegen
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	ab
$\pm\infty$	$b > 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$b < 0$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	$b = 0$	**?**
∞	∞	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	∞	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	∞

Quotienten: Hier wird immer $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt.

Voraussetzungen		mögliche Folgerungen
$(a_n)_n$ konvergiert gegen	$(b_n)_n$ konvergiert gegen	$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ konvergiert gegen
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$	$\frac{a}{b}$
$a > 0$	0	$\begin{cases} \infty, & \text{falls } b_n > 0 \text{ für alle } n > n_0 \\ -\infty, & \text{falls } b_n < 0 \text{ für alle } n > n_0 \\ \text{ist divergent}, & \text{sonst} \end{cases}$
$a < 0$	0	$\begin{cases} -\infty, & \text{falls } b_n > 0 \text{ für alle } n > n_0 \\ \infty, & \text{falls } b_n < 0 \text{ für alle } n > n_0 \\ \text{ist divergent}, & \text{sonst} \end{cases}$
0	0	**?**
$a \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$b > 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$b < 0$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	0	$\begin{cases} \pm\infty, & \text{falls } b_n > 0 \text{ für alle } n > n_0 \\ \mp\infty, & \text{falls } b_n < 0 \text{ für alle } n > n_0 \\ \text{ist divergent}, & \text{sonst} \end{cases}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	**?**

Beispiele:

1. Für die Folge $\left(\dfrac{3n+2}{n+10}\right)_n$ gilt: da

$$\frac{3n+2}{n+10} = \frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{10}{n}},$$

und

$$\lim_{n\to\infty} 3 = 3, \quad \lim_{n\to\infty} 2 = 2, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \left(\lim_{n\to\infty} 2\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 0,$$

$$1+\frac{10}{n} > 0 \text{ für alle } n > 0, \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + 10 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1,$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{10}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\dfrac{2}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\dfrac{10}{n}} = \frac{3}{1} = 3.$$

2. Für die Folge $\left(\dfrac{5n^3+3n^2+5n+6}{2n^4+8n+8}\right)_n$ gilt:

$$\frac{5n^3+3n^2+5n+6}{2n^4+8n+8} = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{2n+\frac{8}{n^2}+\frac{8}{n^3}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}\right) = 5,$$

$$2n+\frac{8}{n^2}+\frac{8}{n^3} > 0 \text{ für alle } n > 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{8}{n^2}+\frac{8}{n^3}\right) = \infty$$

Somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+3n^2+5n+6}{2n^4+8n+8} = 0.$$

3. Für die Folge $\left(\sqrt{\dfrac{6n^2+2n+1}{3n^2+10n+2}}\right)_n$ gilt:

$$\frac{6n^2+2n+1}{3n^2+10n+2} = \frac{6+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{10}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

$$\text{und } 3+\frac{10}{n}+\frac{2}{n^2} > 0 \text{ für alle } n > 0.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 6 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\sqrt{6+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{6},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{10}{n}+\frac{2}{n^2}\right)=3 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\sqrt{3+\frac{10}{n}+\frac{2}{n^2}}=\sqrt{3},$$

ist

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{6n^2+2n+1}{3n^2+10n+2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3+\frac{10}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}.$$

4. Für die Folge $\left(\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+10n+2}\right)_{n\geq 1}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+10n+2}=\\
&=\left(\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+10n+2}\right)\frac{\left(\sqrt{n^2+2n+1}+\sqrt{n^2+10n+2}\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n+1}+\sqrt{n^2+10n+2}\right)}=\\
&=\frac{n^2+2n+1-n^2-10n-2}{\sqrt{n^2+2n+1}+\sqrt{n^2+10n+2}}=\frac{-8n-1}{\sqrt{n^2+2n+1}+\sqrt{n^2+10n+2}}=\\
&=\frac{-8-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{10}{n}+\frac{2}{n^2}}}
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+10n+2}\right)=-\frac{8}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=-4.$$

Ein wichtiges Beispiel für Anwendung von Quetschlemma/Einschachtelungsprinzip: Betrachte die Folge $(x_n)_n=\left(\frac{n}{2^n}\right)_n$.

1. Man kann zeigen dass $2^n\geq\frac{n^2}{2}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Somit ist $\dfrac{n}{2^n}\leq\dfrac{n}{n^2/2}=\dfrac{2}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

2. Wir wenden das Einschachtelungsprinzip an $(x_n)_n$ mit $(a_n)_n=(0)_n$ und $(b_n)_n=\left(\frac{2}{n}\right)_n$:

$$0\leq\frac{n}{2^n}\leq\frac{2}{n},\ \lim_{n\to\infty}0=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.$$

Allgemein gilt:
Satz: Sei q eine reelle Zahl mit $|q|<1$ und sei $k\in\mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}q^n n^k=0.$$