Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Probeklausur zur Vorlesung

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2011/2012

Beachten Sie die folgenden Hinweise:

- **Anzahl der Aufgaben: 9 auf 3 Blättern, Dauer der Klausur: 3 Stunden.**
- **Die Klausur ist bestanden bei mindestens 31 Punkte.**
- Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.
- Es ist nur ein beschriebenes DinA4 Blatt (Vorder- und Rckseite) als Hilfsmaterial erlaubt.

Viel Glück!

Aufgabe 1 (2+2+2=6 Punkte)

Bestimmen Sie zu den folgenden linearen Gleichungssystemen die Lösungsmenge.

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 7 \\ x_2 + x_3 & = & 17 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \end{array} \right. , \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 & = & 8 \\ x_1 - x_2 & = & 2 \\ 2x_2 - x_1 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 & = & -1 \end{array} \right. ,$$

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 44 \\ 5x_1 + 8x_3 - x_4 & = & 43 \\ x_2 - 4x_1 + 5x_4 & = & 30 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 & = & 25 \end{array} \right. ,$$

Aufgabe 2 (2+1+2+2=7 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom zu A.

(c) Berechnen Sie alle Eigenwerte zu A.

(d) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum (d.h. die Menge aller Eigenvektoren).

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Betrag und das Argument in $[0, 2\pi)$ der komplexen Zahlen

$$(2+i)^2 \quad \text{und } 4e^{-i}$$

und schreiben Sie die Zahlen in der Form $a + ib$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Lösen Sie die quadratische Gleichung $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Beweisen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch (d.h. $A^\top = A$), so sind die Eigenwerte von A reell.

Aufgabe 5 (3+2+4=9 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2)(5n^2+4n)}{8n^4+3n^3+2n^2+6}.$$

(b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$$

auf Konvergenz.

(c) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log(y))^n}{n!} = y$ gilt für alle $y > 0$.

Aufgabe 6 (2+3+3=8 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^{\left(x^2\right)}$, wobei $a > 0$ fixiert.

(b) Berechnen Sie die zweite Ableitung der Funktion $g : g(x) = \log(\log(x))$.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert?

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : h(x) = \dfrac{\cos(x) + \exp(x)}{(\tan(x))^2}$.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert?

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Polynom fünften Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Es sei $I = [0,3] \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}.$$

Ist f stetig auf I? Ist f differenzierbar auf $(0,3)$? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f auf I. Zeigen Sie, dass eine Umkehrfunktion zu $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe 9 (2+2+2=6 Punkte)

Berechnen sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_1^2 \frac{\cos(\log x)}{x} \mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^2 \frac{2x+8}{x+1} \mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x \mathrm{d}x.$$