Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
WS 2011-2012

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (1+1+1+1+2=6 Punkte)

Bestimmen Sie zu den folgenden linearen Gleichungssystemen die Lösungsmenge. Benutzen Sie dabei die Matrixdarstellung des Gleichungssystems und den Gauß-Algorithmus.

$$
\text{(a)} \left\{ \begin{array}{ccc} x_2 + x_1 + x_3 & = & 3 \\ x_3 & = & 1 \\ x_3 + x_2 & = & 2 \end{array} \right. , \quad
\text{(b)} \left\{ \begin{array}{ccr} x_1 - x_2 + x_3 & = & 9 \\ 2x_1 - x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - \frac{x_3}{2} & = & -1 \end{array} \right. , \quad
\text{(c)} \left\{ \begin{array}{ccr} x_2 - x_3 & = & -4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 & = & 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 5 \end{array} \right. ,
$$

$$
\text{(d)} \left\{ \begin{array}{ccr} x_1 - 3x_3 + x_4 & = & 2 \\ 2x_1 - 3x_2 & = & -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. , \quad
\text{(e)} \left\{ \begin{array}{ccr} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ \frac{x_1 + 3x_3}{2} + x_2 + 2x_4 & = & 5 \\ x_1 - 2(x_2 + 2x_4) - x_3 & = & -1 \end{array} \right. .
$$

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Harnstoff reagiert mit salpetriger Säure zu Kohlendioxid, Stickstoff und Wasser:

$$CH_4N_2O + aHNO_2 \rightarrow bCO_2 + cN_2 + dH_2O.$$

Die (i.A. rationalen) Zahlen a, b, c, d, für welche diese Reaktionsgleichung erfüllt ist, lassen sich durch ein lineares Gleichungssystem berechnen. Stellen Sie dieses auf und lösen Sie es.

Aufgabe 3 (1+1+1+1+1+1=6 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Vektoren sind linear unabhängig?
(a) a_1, a_2, a_3 (b) a_1, a_2, a_3, a_4 (c) a_1, a_5 (d) a_3, a_4, a_5 (e) a_1, a_2, a_5 (f) a_1, a_4

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

(a) Wie muss man eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ wählen, sodass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig werden?

(b) Begründen Sie die folgende Aussage: Sind $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren, so lässt sich jeder beliebige Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ in der Form

$$a = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3$$

mit geeigneten reellen Zahlen c_1, c_2, c_3 schreiben.
Hinweis: Was wissen Sie über die lineare Unabhängigkeit von a_1, a_2, a_3, a?

Abgabetermin: 04.11.2011 vor der Vorlesung.