



Mathematik für Studierende der Biologie  
und des Lehramtes Chemie  
WS 2011-2012

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Lösen Sie für jeden möglichen Wert  $t \in \mathbb{R}$  das folgende LGS:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & t & -3t+2 & 1-t \\ -2 & -t & 3t-3 & t-2 \\ -4 & -3t & t^2+5t-4 & -t^2+4t-4 \end{array} \right)$$

Machen Sie dabei eine Fallunterscheidung wenn notwendig.

**Hinweis:** Bei Anwendung des Gauß-Algorithmus ergibt sich  $(t^2 - 4t + 3)x_3 = -t^2 + t$ .

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

(a) Gegeben seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Welche der Matrixprodukte  $uv$ ,  $u^\top v$ ,  $uv^\top$  und  $u^\top v^\top$  sind definiert? Berechnen Sie gegebenenfalls die Produkte.

(b) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 9 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad D = (0 \ 0 \ 0) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}.$$

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, zwei dieser Matrizen miteinander zu multiplizieren (beachten Sie, dass eine Matrix auch mit sich selbst multipliziert werden kann). Berechnen Sie die Produkte  $AB$  und  $BC$ .

### Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

- (a) Betrachten Sie die beiden  $(2 \times 2)$ -Matrizen  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  sowie die zugehörigen linearen Abbildungen

$$f_P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Beschreiben Sie die Wirkungsweise von  $f_P$  und  $f_S$  geometrisch.  
(ii) Berechnen Sie die Matrizen  $PP$ ,  $SS$ ,  $PS$  und  $SP$  und beschreiben Sie die Wirkungsweise der zugehörigen linearen Abbildungen.
- (b) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{17} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Weiter sei ein Vektor  $c \in \mathbb{R}^4$  gegeben und es seien  $x, y \in \mathbb{R}^4$  (unbekannte) Vektoren mit

$$Ax = c = By.$$

Kann man anhand dieser Angaben die Vektoren  $x$  bzw.  $y$  eindeutig bestimmen?

**Hinweis:** Sie brauchen *keine* explizite Formel für  $x$  bzw.  $y$  zu finden.

### Aufgabe 4 (3+1+1=5 Punkte)

Es sei  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gegeben. Zeigen Sie, dass  $A$  invertierbar ist und berechnen Sie die inverse Matrix. Lösen Sie dann die linearen Gleichungssysteme  $Ax = b$  und  $Ax = c$  mit den rechten Seiten  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Abgabetermin: 11.11.2011 vor der Vorlesung.**