Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
WS 2011-2012

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (1+1+1+1=4 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 3 & \frac{3}{16} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a+2 & 1 & -a \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R} \text{ beliebig }), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (2+2+1=5 Punkte)

Benutzen Sie den Satz über die Eigenschaften der Determinante zur Beantwortung der folgenden Fragen:

(a) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

(b) Für welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & -1 & x+1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & x & 4 \end{pmatrix}$$

invertierbar?

(c) Was ist die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 100 & 1000 \\ 11 & 101 & 1001 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

Betrachtet werden die folgenden linearen Abbildungen $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $f_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad f_B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrizen A und B an, mit denen sich diese Abbildungen beschreiben lassen. Ist die Abbildung f_A bzw. f_B invertierbar?

(b) Gegeben sind zusätzlich die Vektoren

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und } d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Sind die Gleichungen $f_A(x) = c$, $f_A(x) = d$, $f_B(x) = c$ und $f_B(x) = d$ lösbar, und wenn ja, wie viele Lösungen besitzen sie? Sie brauchen die Lösung(en) nicht in allen Fällen explizit zu berechnen.

Aufgabe 4 : Lineare Regression (1+2+3=6 Punkte)

Gegeben sind $n = 5$ Paare von Messwerten (x_j, y_j), $j = 1, \dots, n$, von denen man annimmt, dass sie durch eine (bislang unbekannte) lineare Funktion miteinander in Verbindung stehen:

j	1	2	3	4	5
x_j	0.00	0.70	1.40	2.10	2.80
y_j	1.00	1.00	0.50	-0.15	-0.15

Diese Daten sollen nun möglichst gut durch eine lineare Funktion

$$f_p(x) = p_1 + p_2 x$$

beschrieben werden, d.h. im Idealfall sollte $f_p(x_j) = y_j$ für $j = 1, \dots, n$ gelten. Gesucht sind dabei die Parameter p_1 und p_2.

(a) Schreiben Sie die Gleichungen $f_p(x_j) = y_j$, $j = 1, \dots, n$, in der Form $Ap = y$, wobei

$$A \in \mathbb{R}^{5\times 2}, \; p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \text{und } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}.$$

(b) Da hier aus 5 Bedingungen 2 Unbekannte berechnet werden sollen, kann das LGS aus (a) nur lösbar sein, wenn die Daten sich exakt durch eine lineare Funktion beschreiben lassen und wenn keinerlei Messfehler vorliegen (3 der Gleichungen sind dann redundant). Zeigen Sie, dass dies hier nicht der Fall ist, da obiges LGS keine Lösung besitzt.

(c) Da das LGS $Ap = y$ i.A. nicht lösbar ist, geht man zur sog. Normalgleichung $A^\top Ap = A^\top y$ über. Lösen Sie dieses LGS und zeichnen Sie die berechnete Regressionsgerade.

Aufgabe 5 : Cramer'sche Regel (2+2=4 Punkte)

Die Cramer'sche Regel besagt folgendes: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0$, so hat jedes LGS $(A|b)$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$. Diese Lösung kann man wie folgt bestimmen: Man bildet für $1 \leq j \leq n$ eine Matrix $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, indem man die j - te Spalte von A durch den Vektor b ersetzt. Dann berechnet man $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ und erhält damit die Komponenten des gesuchten Lösungsvektors. Lösen Sie damit die folgenden linearen Gleichungssysteme und testen Sie ihr Ergebnis:

(a) $\left(\begin{array}{rr|r} 3 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{array} \right)$,

(b) $\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right)$.

Abgabetermin: 18.11.2011 vor der Vorlesung.