**Universität des Saarlandes**
**Fachbereich 6.1 Mathematik**
**Dr. R. Grzibovskis**

# Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
# WS 2011-2012

# Übungsblatt 5

## Aufgabe 1 (1+1+3+3=8 Punkte)

Nutzen Sie die Rechenregeln für komplexe Exponenten

- für alle $a$, $b \in \mathbb{C}$ gilt $e^a e^b = e^{a+b}$,
- für alle $a \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$ gilt $(e^a)^m = e^{ma}$,

und die Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, um die folgenden Relationen für $\varphi$, $\psi \in \mathbb{R}$ zu beweisen

(a) $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\,\cos\varphi$,

(b) $\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi$,

(c) $\sin(3\varphi) = 3(\cos\varphi)^2\sin\varphi - (\sin\varphi)^3$,

(d) $\cos(4\varphi) = (\cos\varphi)^4 + (\sin\varphi)^4 - 6(\cos\varphi)^2\,(\sin\varphi)^2$.

## Aufgabe 2 (1.5+1.5+1+2+2=8 Punkte)

Berechnen Sie alle reellen Eigenwerte der folgenden Matrizen. Bestimmen Sie im Anschluss zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum (d.h. die Menge aller Eigenvektoren).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 3 (1+2=3 Punkte)**

Machen Sie sich vor der Lösung dieser Aufgabe nochmals klar, wie man die Determinate einer oberen Dreiecksmatrix berechnet.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

an (sie sollen nicht ausmultiplizieren) und bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$.

(b) Bestimmen Sie zu einem Eigenwert ihrer Wahl alle zugehörigen Eigenvektoren.

**Aufgabe 4 (1+2+3=6 Punkte)**

Gegeben sind die folgenden linearen Abbildungen:

(i) Die zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gehörige lineare Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

beschreibt die Spiegelung an der $x_2$-Achse.

(ii) Die zu einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gehörige lineare Abbildung

$$f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

beschreibt die Drehung um $\pi/2$ im Uhrzeigersinn.

(iii) Die zu einer Matrix $F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gehörige lineare Abbildung

$$f_F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt die Projektion auf die $x_1x_2$-Ebene.

(a) Geben Sie die Matrizen $A$, $B$, $F$ an, mit denen sich die drei linearen Abbildungen beschreiben lassen.

(a) Bestimmen Sie ohne zu rechnen alle reellen Eigenwerte der drei Abbildungen (benutzen Sie nur die Definition von Eigenwert und Eigenvektor). Ermitteln Sie außerdem zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

(b) Prüfen Sie ihre intuitiven Ergebnisse, indem Sie die (im Allgemeinen komplexen) Eigenwerte der drei Matrizen berechnen.

**Abgabetermin: 02.12.2011 vor der Vorlesung.**