Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie WS 2011-2012

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (0.5+2.5+1+1=5 Punkte)

(a) Stellen Sie $n!$ (n Fakultät) mit dem Produktzeichen dar.

(b) Berechnen Sie:

$$\sum_{i=0}^{3}(i-10)\,, \quad \sum_{k=-2}^{2}\sin\left(\frac{\pi k}{7}\right), \quad \sum_{m=2}^{2012}\frac{1}{2011}, \quad \prod_{n=1}^{100}\log(n)\,, \quad \prod_{m=1}^{5}m.$$

(c) Rechnen Sie nach, dass $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Finden Sie dann einen geschlossenen Ausdruck für die Summe

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\,, \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ fest.}$$

(d) Leiten Sie aus der in (c) ermittelten Formel einen Ausdruck für die Summe $\sum_{k=1}^{n} k$ ab.

Aufgabe 2 (2+3=5 Punkte)

Ein Kind bekommt ein Meerschweinchenpaar geschenkt. Jedes Jahr wirft das Weibchen Junge. Das Kind behält von jedem Wurf zwei Meerschweinchen gleichen Geschlechts, die es zusammen in einen eigenen Käfig setzt, und verschenkt die restlichen. Es treten keine Todesfälle auf. Ein Meerschweinchen frisst jeden Tag 200g Körnerfutter.

(a) Beschreiben Sie die Anzahl der Meerschweinchen des Kindes im n-ten Jahr durch eine Folge $(a_n)_n$. Wie viele Meerschweinchen hat das Kind nach 5 Jahren? Wie viel Futter (in kg) hat es in den 5 Jahren gebraucht?

(b) Diesmal behält das Kind von jedem Wurf ein Pärchen. Jedes dieser Pärchen wirft ebenfalls jedes Jahr einmal, erstmals im Alter von einem Jahr. Beantworten Sie dieselben Fragen wie in Teil (a). Was halten die Eltern des Kindes davon?

Aufgabe 3 (2+2+2=6 Punkte)

(a) Stellen Sie eine Vermutung auf, ob die nachstehenden Folgen konvergieren bzw. uneigentlich konvergieren, und was gegebenenfalls der jeweilige Grenzwert ist (dieser kann in $\mathbb{R}$ liegen, aber auch $\pm\infty$ sein). Beweisen Sie Ihre Vermutung nur unter Benutzung der Definition von Konvergenz. Verwenden Sie also insbesondere nicht die Grenzwertsätze:

$$\left(n+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\frac{2}{n^2}\right)_{n\geq 1}.$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte der nachstehenden Folgen:

$$\text{(i)} \ \left(\frac{7n^4-8n^3-1}{2n^4-n^2+500}\right)_{n\geq 1}, \quad \text{(ii)} \ \left(\frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n}+5}\right)_{n\geq 1}.$$

(c) Es sei $c\in\mathbb{R}$. Finden Sie Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, für die gilt:

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} a_n b_n = c,$$
$$\text{(iii)} \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty, \qquad \text{(iv)} \lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty.$$

Aufgabe 4 (1+1+1+1=4 Punkte)

Bestimmen Sie den Grenzwert der nachstehenden Folgen (in $\mathbb{R}$ oder $\pm\infty$):

(a) $\left(\sqrt{\dfrac{8n^3+4n^2+2n+1}{30n^2+15n+2}}\right)_{n\geq 2011}$,

(b) $\left(\dfrac{(-1)^n\ n^2+4}{2+n^3}\right)_{n\geq 2011}$,

(c) $\left(-\dfrac{3^n}{n^{30}+30}\right)_{n\geq 2011}$,

(d) $\left(\sqrt{2n^2+n+1}-2n\right)_{n\geq 2012}$.

Hinweis: Benutzen Sie in (b) das Einschachtelungsprinzip und den Satz über $\lim\limits_{n\to\infty} q^n n^k$.

Abgabetermin: 09.12.2011 vor der Vorlesung.