Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie WS 2011-2012

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (1+2+2=5 Punkte)

Bestimmen Sie den Grenzwert der nachstehenden Folgen (in $\mathbb{R}$ oder $\pm\infty$).

(a) $\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)_{n\geq 1}$

(b) $\left(\dfrac{(-1)^n\,5n-2n-n\sqrt{n}+1}{3n\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$

(c) $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\geq 1}$

Hinweis: Benutzen Sie in (b) und (c) den Einschachtelungssatz (Quetschlemma).

Aufgabe 2 (2+1+2+2=7 Punkte)

Betrachtet wird die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, die über die Startwerte $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und die Rekursionsgleichung

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

gegeben ist. Ziel ist es, eine geschlossene Darstellung für die Folgenglieder anzugeben.

(a) Machen Sie den (willkürlichen) Ansatz $a_n = x^n$ mit festem (aber unbekanntem) $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass genau für $x = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ und $y = \left(1-\sqrt{5}\right)/2$ die Rekursionsgleichung gilt.

(b) Weisen Sie nach, dass mit $(x^n)_n$ und $(y^n)_n$ auch $(\alpha x^n + \beta y^n)_n$ die Rekursionsgleichung erfüllt, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden können.

(c) Ziehen Sie die Startwerte $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ hinzu, um die beiden freien Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass die Folge $(\alpha x^n + \beta y^n)_n$ genau der Fibonacci-Folge entspricht. Geben Sie so berechnete geschlossene Form der Fibonacci-Folge an.

(d) Testen Sie ihr Ergebnis, indem Sie die Folgenglieder a_8, a_9, a_{10} mit der hergeleiteten expliziten Formel ermitteln und das Ergebnis mittels der rekursiven Darstellung kontrollieren.

Aufgabe 3 (2+5=7 Punkte)

(a) Zeigen Sie die folgenden Identitäten

$$\text{(i) } \frac{10}{9} = 1.111111111\ldots, \quad \text{(ii) } \frac{815}{99} = 8.23232323\ldots,$$

$$\text{(iii) } \frac{1004}{999} = 1.005005005\ldots, \quad \text{(iv) } 2 = 1.999999999\ldots.$$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+3}{k^3-k^2}, \quad \text{(ii) } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2+2}{m^4+4}, \quad \text{(iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{2^n}$$

$$\text{(iv) } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m-3}{m^2}, \quad \text{(v) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2^k}{k+3^k}.$$

Hinweise zu Teil (b):

- In (i) können Sie verwenden, dass $2k^2 \leq k^3$ ist für $k \geq 2$ und diese Abschätzung nutzen, um den Nenner durch einen einfacheren Ausdruck zu ersetzen. Etwas Ähnliches können Sie auch im Zähler tun. Dieselbe Technik kann Ihnen auch bei den anderen Reihen helfen.
- Generell ist es bei vielen Reihen hilfreich, das Vergleichskriterium einzusetzen.
- In (v) bietet es sich an, mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ zu vergleichen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Der Weihnachtsmann macht sich mit seinem Rentier Rudolph auf den Weg zu den Wichteln, um den Schlitten mit den Geschenken abzuholen. Wie jeder weiß, ist der Weihnachtsmann nun auch nicht mehr der Jüngste. Er läuft mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h zu dem 3 km entfernten Wichtelhaus. Sein Rentier hingegen, frisch und ausgeruht, springt mit 6 km/h durch den Wald. Sie starten gleichzeitig. Um sich mal so richtig auszutoben, läuft Rudolph schnurstracks zum Wichtelhaus, dreht dort um, läuft zurück zum Weihnachtsmann, dreht wieder um, läuft zum Wichtelhaus, zurück zum Weihnachtsmann, und so weiter. Wieviel Kilometer ist Rudolph wohl gelaufen, wenn der Weihnachtsmann am Wichtelhaus ankommt?
Die Zeit, die das Rentier zum Wenden braucht, soll vernachlässigt werden (Rudolph ist in der Tat äußerst wendig und flink). Lösen Sie die Aufgabe zunächst, indem Sie eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ aufstellen, bei der s_k die Länge des Wegstücks ist, das Rudolph beim k-ten Mal vom Weihnachtsmann hin und zurück zum Wichtelhaus zurücklegt. Berechnen Sie dann den Wert dieser Reihe. Kann man die Aufgabe auch einfacher lösen?

Abgabetermin: 16.12.2011 vor der Vorlesung.