**Universität des Saarlandes**
**Fachbereich 6.1 Mathematik**
**Dr. R. Grzibovskis**

# Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie WS 2011-2012

## Übungsblatt 11

**Aufgabe 1 (1+1+1+1=4 Punkte)**

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und Monotonieintervalle folgender Funktionen:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 3x^2 - \frac{x^4}{2}$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = x^2 \exp(1-x)$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \setminus [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \log\left(x^2 - 1\right)$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = x^4 - 8x^3$

**Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)**

(a) Der Energieverbrauch eines Wellensittichs im Flug in $\frac{J}{g \cdot km}$ wird näherungsweise durch die Formel

$$E(v) = \frac{1}{v}\left(0.31\,(v-35)^2 + 92\right)$$

beschrieben. Dabei wird die Geschwindigkeit $v$ in $km/h$ gemessen. Welche Geschwindigkeit ist (ungefähr) am energieeffizientesten?

(b) Der Ertrag $y$ einer Pflanzensorte wächst nicht beliebig mit der Düngung $x$, sondern lässt sich gemäß dem Gesetz von Mitscherlich wie folgt beschreiben:

$$y(x) = y_0\left(1 - e^{-rx}\right).$$

Hierbei bezeichnet $y_0$ die maximale Kapazität und $r$ die relative Wachstumskonstante. Betrachtet wird nun der Gewinn

$$G(x) = p\,y(x) - kx,$$

der bei einem Absatz-Stückpreis von $p$ und Düngungs-Stückkosten von $k$ entsteht. Die Konstanten $y_0$, $r$, $p$, $k$ werden alle als positiv vorausgesetzt. Ermitteln Sie, für wie viel Dünger der Gewinn maximal wird.

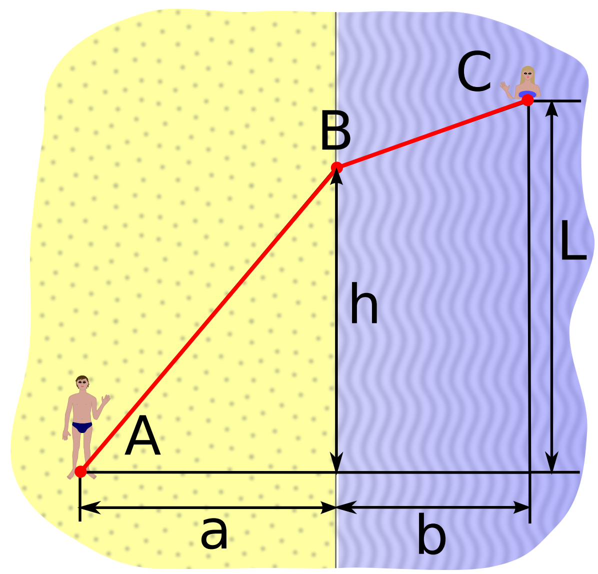
**Aufgabe 3 (3 Punkte)**

Die potentielle Energie eines (kräftefreien) zweiatomigen Moleküls kann näherungsweise durch das Lennard-Jones-Potential

$$V : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad V(x) = V_0 \left[ \left( \frac{a}{x} \right)^{12} - 2 \left( \frac{a}{x} \right)^{6} \right],$$

als Funktion des Kernabstands $x$ der beiden in ihm enthaltenen Atome ausgedrückt werden. Hierbei sind $a$ und $V_0$ positive Konstanten. Skizzieren Sie den Graphen von $V$. Ermitteln Sie dazu durch Kurvendiskussion alle benötigten Informationen (Nullstellen, Extremstellen, Grenzwerte).

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**


Betrachte die folgende Situation. Angelina braucht Hilfe. Sie befindet sich im See $b$ Meter von der Küste (Punkt $C$). Brad sieht das. Er steht auf dem Strand $a$ Meter von der Küste und $L$ Meter von Angelina entlang der Küste (Punkt $A$). Brad will ihr so schnell wie möglich zu Hilfe kommen. Er läuft mit der Geschwindigkeit $v_1 = 10\ m/s$ und schwimmt mit $v_2 = 1\ m/s$. Zeigen Sie, dass die beste Position, an der Brad zu schwimmen anfangen sollte (Punkt $B$), nicht auf der Geraden $AC$ liegt. Beweisen Sie, dass die Ungleichung $h > La/(a+b)$ für den optimalen Abstand $h$ gilt.

**Hinweis:** Zuerst schreiben Sie die notwendige Zeit als $T(h) = T_1(h) + T_2(h)$, wobei $T_1(h)$ die Zeit, die Brad läuft und $T_2(h)$ die Zeit, die er schwimmt. Dann untersuchen Sie die Monotonieintervalle für die Funktion $T : [0, L] \to \mathbb{R}$, um zu zeigen, dass eine Minimumstelle existiert, die oben genannte Ungleichung erfüllt.

**Abgabetermin: 03.02.2012 vor der Vorlesung.**