# Kapitel 1

# Mengen

## 1.1 Motivation

Der Mengenbegriff ist von grundlegender Bedeutung in vielen Bereichen der Informatik, z.B. bei Datenbanken.

## 1.2 Definition: Menge

Unter einer Menge $M$ verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente von $M$ genannt werden, zu einem Ganzen.

## 1.3 Anmerkungen

a) Dieser Mengenbegriff geht auf Georg Cantor (1845-1918) zurück. Er begründete die moderne Mengenlehre.

b) Der Mengenbegriff ist nicht unumstritten und widerspruchsfrei, genügt jedoch unseren Anwendungen.

   Beispiel: Der Barbier rasiert alle Menschen, die sich selbst nicht rasieren. Wer rasiert den Barbier?

c) Die Elemente einer Menge werden in geschweiften Klammern eingeschlossen.

   Beispiel: $\{4, 1, 5\}$

d) Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle. Wir unterscheiden also nicht zwischen $\{4, 1, 5\}$ und $\{1, 4, 5\}$. Ebenso spielen Wiederholungen keine Rolle. Wir identifizieren also $\{1, 4, 5\}$ und $\{1, 1, 4, 5\}$.

e) Symbole für wichtige Mengen:

$\mathbb{N} := \{x \mid x$ ist natürliche Zahl $\} = \{1, 2, 3...\}$

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, ...\}$ : natürliche Zahlen mit $\{0\}$

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$ : ganze Zahlen

$\mathbb{Q} := \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ : rationale Zahlen

$\mathbb{R}$ : reelle Zahlen

$\emptyset, \{\}$ : leere Menge (enthält kein Element)

## 1.4 Definition: Teilmenge

a) $A$ heißt Teilmenge von $B$ (d.h. $A \subset B$ oder $B \supset A$), wenn jedes Element von $A$ auch Element von $B$ ist: $x \in A \Rightarrow x \in B$.

b) In diesem Fall nennt man $B$ auch Obermenge von $A$.

c) Zwei Mengen $A$ und $B$ sind gleich ($A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$. Andernfalls sind sie ungleich ($A \neq B$).

d) Falls $A \subset B$ und $A \neq B$, schreibt man auch $A \subsetneqq B$ und sagt: $A$ ist echt enthalten in $B$.

e) Ist $A$ nicht Teilmenge von $B$, schreibt man $A \not\subset B$.

## 1.5 Bemerkungen

a) Beziehungen zwischen Mengen kann man durch so genannte Venn-Diagramme (nach John Venn (1834-1923)) veranschaulichen.

b) $\emptyset$ ist Teilmenge von jeder Menge.

Warum? Es existiert kein Element in $\emptyset$, das nicht zu $A$ gehört.

## 1.6 Definition: Potenzmenge

Ist $M$ eine Menge, so heißt

$$P(M) := \{X \mid X \subset M\}$$

die Potenzmenge von $M$.

## 1.7 Beispiele

a) $M = \{1, 2\}, \quad P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

b) $M = \{a, b, c\}, \quad P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

c) $M = \emptyset, \quad P(M) = \{\emptyset\}$

Algemein gilt: Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge hat $2^n$ Elemente.

## 1.8 Operationen auf Mengen

Durchschnitt (Schnittmenge) zweier Mengen $M$ und $N$:

$$M \cap N := \{x | x \in M \text{ und } x \in N\}$$

$M$ und $N$ heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$.

Beispiel: $M = \{1, 3, 5\}, \quad N = \{2, 3, 5\}, \quad S = \{5, 7, 8\}$
$M \cap N = \{3, 5\}$ , $(M \cap N) \cap S = \{5\}$

Vereinigung zweier Mengen $M$ und $N$:

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$$

Dabei darf $x$ auch in beiden Mengen sein (”oder” ist kein ”exklusives oder”).

Differenzmenge

$$M \setminus N := M - N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$$

$M \setminus N$ heißt auch Komplement von $N$ in $M$, Schreibweise: $\overline{N}^M$.

Wenn die Grundmenge klar ist schreibt man meist $\overline{N}$ oder $N^C$.

## 1.9 Satz (Rechenregeln für Durchschnitte und Vereinigungen)

Seien $M$,$N$ und $S$ Mengen. Dann gelten folgende Gesetze:

a) Kommutativgesetze:

i) $M \cup N = N \cup M$
ii) $M \cap N = N \cap M$

b) Asoziativgesetze:

i) $(M \cup N) \cup S = M \cup (N \cup S)$
ii) $(M \cap N) \cap S = M \cap (N \cap S)$

c) Distributivgesetze

i) $M \cap (N \cup S) = (M \cap S) \cup (M \cap S)$
ii) $M \cup (N \cap S) = (M \cup S) \cap (M \cup S)$

Ferner gilt für jede Menge M

i) $M \cup \emptyset = M$
ii) $M \cap \emptyset = \emptyset$
iii) $M \setminus \emptyset = M$

*Beweis von (c)(i).*
Zu zeigen:

$$\underbrace{M \cap (N \cup S)}_{=:A} = \underbrace{(M \cap N) \cup (M \cap S)}_{=:B}$$

Um $A = B$ zu zeigen, zeigen wir, dass $A \subset B$ und $B \subset A$.

"$A \subset B$" : Sei

$$x \in A \Rightarrow x \in M \text{ und } (x \in N \text{ oder } x \in S)$$

.
Falls $x \in N : x \in M \cap N \;\Rightarrow\; x \in (M \cap N) \cup (M \cap S) = B$.
Falls $x \in S : x \in S \cap M \;\Rightarrow\; x \in (M \cap S) \cup (M \cap N) = B$.

"$B \subset A$" : Sei

$$x \in B \Rightarrow x \in M \cap N \;\text{ oder }\; x \in M \cap S$$

.
Falls $x \in M \cap N : \Rightarrow x \in M$ und $x \in N$
$\Rightarrow x \in N \cup S$ (wegen $x \in N$)
$\Rightarrow x \in M \cap (N \cup S) = A$ (wegen $x \in M$).
Falls $x \in M \cap S : \Rightarrow x \in M$ und $x \in S$
$\Rightarrow x \in N \cup S$ (wegen $x \in S$)
$\Rightarrow x \in M \cap (N \cup S) = A$ (wegen $x \in M$) ■