Universität des Saarlandes
Fachrichtung – Mathematik
PD Dr. Darya Apushkinskaya

Mathematik für Informatiker 1 (WS 2020/2021)
Blatt 12

Themen:

1. Mengen
2. Aussagenlogik
3. Beweisprinzipien
4. Relationen
5. Abbildungen
6. Primzahlen und Teiler
7. Modulare Arithmetik
8. Axiomatik reeller Zahlen
9. Komplexe Zahlen
10. Folgen
11. Reihen
12. Potenzreihen
13. Darstellung von Zahlen in Zahlsystemen
14. Binomialkoeffizient und die Binomialreihe
15. Stetigkeit
16. Wichtige stetige Funktionen
17. Differenzierbarkeit
18. Mittelwertsätze und Regel von l'Hospital
19. Satz von Taylor
20. Konvexität
21. Verfahren zur Berechnung von Nullstellen

Aufgabe 1

Themen: Mengen, Aussagenlogik, Beweisprinzipien (1. – 3.)

1. Zeigen Sie, dass für beliebige Teilmengen A und B der Gesamtheit G gilt:
   - $(A\Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$. Erinnerung: $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
   - $\overline{(A \setminus B)} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A}$. Erinnerung: $\overline{M} = G \setminus M$ für alle Teilmengen M von G.

2. Zeigen Sie, dass es sich bei folgender Aussage um eine Tautologie handelt:
   - $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$.
   - $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$.

Aufgabe 2

Themen: Relationen, Abbildungen (4. – 5.)

1. (NKL2011) Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität und berechnen Sie $f([0,1])$ sowie $f^{-1}([0,1])$:

   (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x, & x \notin \mathbb{N}, \\ x+1, & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$

   (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x, & x \notin \mathbb{N}, \\ x-1, & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$

2. Betrachten Sie die folgende Relation R auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \text{ ist gerade}\}$$

   Überprüfen Sie, ob diese Relation R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3

Themen: Primzahlen und Teiler, Modulare Arithmetik, Darstellung von Zahlen in Zahlsystemen (6. - 7., 13.)

1. Berechnen Sie $g := \mathrm{ggT}(14, 33)$ mithilfe des Euklidischen Algorithmus' und stellen Sie g in der Form $g = 14 \cdot x + 33 \cdot y$.

2. Stellen Sie die Zahl $(1340)_5$ im Zahlsystem zur Basis 3 dar.

3. Überprüfen Sie, ob für die Restklasse $[20]$ in $\mathbb{Z}_{33}$ ein inverses Element bezüglich der Multiplikation existiert.

Aufgabe 4

Themen: Axiomatik reeller Zahlen, Komplexe Zahlen (8. - 9.)

1. Berechnen Sie $\left|\frac{(1+i)^2}{3-4i}\right|$.

2. Zerlegen Sie das komplexe Polynom $x^4 - 4$ in Linearfaktoren.

3. Bestimmen Sie ein komplexes Polynom der Form $2z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ mit den Nullstellen $z_1 = -3$, $z_2 = 2 + 2i$ und $z_3 = 2 - 2i$.

4. Zeigen Sie:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5

Themen: Reihen, Potenzreihen, Binomialkoeffizient und die Binomialreihe (11. - 12., 14.)

1. Berechnen Sie:

   - $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}$

   - $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

2. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n\binom{n+1}{2}, \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n?$$

Aufgabe 6

Themen: Folgen, Mittelwertsätze und Regel von l'Hospital (10., 18.)

1. Bestimmen Sie

   - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^4+2n^2-1}-n^2$

   - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^5}+2n)\sin(n^2+1)}{(n+1)^2\sqrt[3]{1+2n}}$

2. Bestimmen Sie

   - $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\frac{1}{\tan(x)}-\frac{1}{\sin(3x)}\right)$,

   - $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sqrt[\cos(x)]{\sin(x)}$,

   - $\lim\limits_{x\to 0} \left(2-e^{\arcsin^2(\sqrt{x})}\right)^{\frac{3}{x}}$.

Aufgabe 7

Themen: Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Satz von Taylor (15. – 17., 19.)

1. Gegeben Sei die Funktion $f(x)=(5-2x)^{-1}$.

   - Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt
   $$f^{(n)}(x)=2^n n!(5-2x)^{-(n+1)}.$$

   - Berechnen Sie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0=1$.

2. Gegeben sei die Funktion
   $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \begin{cases} x+2, & x<-1,\\ -x, & -1<x<1,\\ x-2, & x>1,\\ 1, & x\in\{-1,1\}.\end{cases}$$

   - An welchen Stellen $x\in\mathbb{R}$ ist f stetig?

   - Untersuchen Sie f eingeschränkt auf das Intervall $[0,2]$ auf die Existenz von Minima und Maxima.

3. Bestimmen Sie die Taylorreihe für die Funktion
   $$f(x)=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$$
   um den Entwicklungspunkt $\xi=-1$.

Aufgabe 8

Themen: Kurvendiskusion, d.h.: Differenzierbarkeit, Konvexität usw. (15.-20.)

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}$. Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich, die Nullstellen, das Verfahren im Unendlichen, das Verhalten an den Definitionslücken, die Extrema und die Wendepunkte. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

2. Finden Sie globales Maximum und globales Minimum der Funktion

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$$

auf dem Intervall $[-3, 0]$.

Aufgabe 9

Themen: Verfahren zur Berechnung von Nullstellen (21.)

1. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = e^{-0,5x} - x$.

    - Wieviele Nulstellen besitzt f?
    - Überprüfen Sie, ob die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes zur Berechnung der Nullstellen von f im Intervall $I = [0, 1]$ erfüllt sind.
    - Berechnen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ Näherungen für die Nullstelle von f mithilfe des Newton-Verfahren. Führen Sie 5 Iterationen aus.

Ohne Korrektur