Universität des Saarlandes
Fachrichtung – Mathematik
PD Dr. Darya Apushkinskaya

Mathematik für Informatiker 1 (WS 2020/2021)
Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ nicht beide gleich Null. Sei d die kleinste natürliche Zahl, für die $l, k \in \mathbb{Z}$ existieren so, dass $d = l \cdot a + k \cdot b$.

1. Zeigen Sie mittels Division mit Rest, dass d sowohl a als auch b teilt.
2. Folgern Sie, dass $d = \mathrm{ggT}(a, b)$.
3. Beweisen Sie, dass $[a]$ ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}_m$ hat, falls $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$. Zu zeigen ist also:
$$\mathrm{ggT}(a, m) = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, [b] \in \mathbb{Z}_m \,:\, [a] \cdot [b] = 1.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

1. Überprüfen Sie, ob für die Restklasse $[112]$ in $\mathbb{Z}_{243}$ ein inverses Element bezüglich der Multiplikation existiert.
2. Lösen Sie die Gleichung $x^3 - 2 = 0$ (d.h. $[x]^3 - [2] = [0]$) in $\mathbb{Z}_6$ und in $\mathbb{Z}_8$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ auf Existenz von Minimum, Infimum, Maximum und Supremum. Bestimmen Sie gegebenenfalls die jeweiligen Werte.

1. $M_1 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3} < x \leq \sqrt{5} \right\}$
2. $M_2 := \left\{ \frac{1}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(G, *)$ eine Abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

1. Es gibt genau ein neutrales Element (d.h.: $\exists!\, e \in G$, so dass für alle $a \in G$ gilt $e * a = a$).

2. Für jedes $a \in G$ ist das inverse Element eindeutig bestimmt

   (d.h.: für alle $a \in G \quad \exists!\, b \in G$, so dass $a * b = e$ gilt).

Abgabe: Mittwoch, 09.12.2020 um 23:59.