Universität des Saarlandes
Fachrichtung – Mathematik
PD Dr. Darya Apushkinskaya

Mathematik für Informatiker 1 (WS 2020/2021)
Blatt 6

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $x > 1$. Definiere rekursiv $I_n := [a_n, b_n]$, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1, & b_1 = x, \\ a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{array}$$

1. Zeigen Sie, dass $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist so, dass $\sqrt{x} \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

2. Zeigen Sie:
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)^2}{2(a_n + b_n)} \leq \frac{1}{4}(b_n - a_n)^2.$$

3. Bestimmen Sie I_3 und zeigen Sie, dass
$$b_4 - a_4 < \frac{1}{200000}.$$

Hinweis: Sie dürfen (ohne Beweis) die folgenden elementaren Ungleichungen benutzen:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \qquad \text{für alle } a, b > 0.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie (ohne Taschenrechner!)

$$\left| \frac{i+1}{2-i} - \frac{(i-3)^2}{2i+1} \right|$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

1. Bestimmen Sie die Nullstellen z_1, z_2, z_3 des komplexen Polynoms z^3-1 und zerlegen Sie das Polynom in Linearfaktoren.

2. Zeigen Sie, dass $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ und $|z_j| = 1$ für alle $j = 1, 2, 3$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Bestimmen und skizzieren Sie die folgende Teilmengen komplexer Ebene:

1. $\{z \in \mathbb{C} \quad | \quad 1 < |z + i| \leq 2\}$
2. $\left\{z \in \mathbb{C} \quad | \quad \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1\right\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} \quad | \quad \bar{z} \cdot z > 3 + 2\mathrm{Im}\, z\}$

Abgabe: Mittwoch, 16.12.2020 um 23:59.