Universität des Saarlandes
Fachrichtung – Mathematik
PD Dr. Darya Apushkinskaya

Mathematik für Informatiker 1 (WS 2020/2021)
Blatt 7

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Seien $a_n = \frac{7n-1}{n+1}$ und $a = 7$. Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ die kleinste Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ bestimmen, für die gilt: $\forall\ n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$.

Vervollständigen Sie die Tabelle:

ε	$0,1$	$0,01$
n_0		

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Finden Sie die Grenzwerte nachstehender Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. $a_n = \frac{(3n^2-2n+1)\sqrt{5n-2}}{\left(\sqrt{n}-1\right)(1-n)(3n+2)}$

2. $a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

3. $a_n = \left(\frac{3n-5}{3n}\right)^{6n}$

4. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Hinweis: Sie dürfen alle Eigenschaften konvergenter Folgen benutzen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Jede der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich als Groß-O einer Folge (v_n) der Gestalt $v_n = n^q$ mit geeignetem $q \in \mathbb{N}$ ausdrücken. Bestimmen Sie jeweils das kleinstmögliche q mit dieser Eigenschaft.

1. $a_n = n^2 + n\sin(3n+2)$

2. $a_n = n\left[(5n^2 - 7n - 2n^4)(2n+1)\sqrt{7+2n+3n^2}\right]^3$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

1. Beweisen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge.

2. Beweisen Sie, dass die nachstehende rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

$$a_1 = 4; \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2}{n(5n-1)^2}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen? (Bestimmen Sie den Konvergenzradius R. Falls $R \neq 0$ und $R \neq \infty$, untersuchen Sie das Konvergenzverhalten an den Endpunkten des Konvergenzintervalls.)

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)^{10} x^n}{2n^n}$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}\sqrt[4]{n+4}} x^n$

Abgabe: Mittwoch, 06.01.2021 um 23:59.