Universität des Saarlandes
FR 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
Dr. R. Kirsch

Lösungsvorschläge zur 12. Übung
Praktische Mathematik
Sommersemester 2009

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 12.1 (*Kondition der Integration*).
Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Betrachten Sie die Menge aller Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(x)|\, dx < \infty.$$

a) Zu zeigen: $\|\cdot\|_{L_1}$ ist eine Norm auf dem Vektorraum der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen.

Mit f ist auch $|f|$ stetig und damit über $[a,b]$ integrierbar. $\|\cdot\|_{L_1}$ ist also wohldefiniert.

Homogenität und Dreiecksungleichung folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften des Betrags und der Linearität des Integrals. Ebenso ist $f \equiv 0 \Rightarrow \|f\|_{L_1} = 0$ klar.

Wenn f nicht identisch verschwindet, so existiert ein $x_0 \in [a,b]$, mit $|f(x_0)| = \alpha \neq 0$. Da $|f|$ stetig ist, existiert eine (ggf. einseitige) ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x_0) \subset [a,b]$ mit

$$\forall\, x \in U_\epsilon(x_0)\ :\ |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\,.$$

Daraus folgt

$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(x)|\, dx \geq \epsilon\frac{\alpha}{2} \neq 0.$$

D.h. $\|f\|_{L_1} = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

b) Aus der Dreiecksungleichung für Integrale folgt unmittelbar

$$\big|I[f] - I[\tilde{f}]\big| = \left|\int_a^b \big(f(x) - \tilde{f}(x)\big)\, dx\right| \leq \int_a^b \big|f(x) - \tilde{f}(x)\big|\, dx = \|f - \tilde{f}\|_{L_1}\,,$$

d.h. $\kappa_{\text{abs}} \leq 1$. Für $\tilde{f} < f$ können alle Beträge entfallen und es gilt sogar Gleichheit. Es folgt also

$$\kappa_{\text{abs}} = 1\,.$$

Durch Erweitern der obigen Abschätzung erhält man für die relativen Fehler:

$$\frac{\big|I[f] - I[\tilde{f}]\big|}{|I[f]|} \leq \frac{\|f\|_{L_1}}{|I[f]|}\,\frac{\|f - \tilde{f}\|_{L_1}}{\|f\|_{L_1}}\,,$$

d.h.

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{\|f\|_{L_1}}{|I[f]|} = \frac{\int_a^b |f(x)|\, dx}{\left|\int_a^b f(x)\, dx\right|}$$

Die Integration ist also für solche Integranden f schlecht konditioniert, die um den Wert 0 oszillieren.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 12.2 (*Grenzen der numerischen Integration*).
Sei $\mathbb{P}_m$ der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leq m$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

eine Unterteilung des Intervalls.

a) Zu zeigen: Es existieren eindeutig bestimmte Gewichte $\omega_0, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\forall P \in \mathbb{P}_n \; : \; \sum_{j=0}^{n} \omega_j P(x_j) = \int_a^b P(x)\, dx \, .$$

Wegen $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, x^k$ und der Linearität ist die Forderung äquivalent zu

$$\forall k = 0, \ldots, n \; : \; \sum_{j=0}^{n} \omega_j {x_j}^k = \int_a^b x^k\, dx = \frac{1}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right) .$$

Dies wiederum lässt sich als lineares Gleichungssystem

$$V\, w = g$$

schreiben mit

$$w = (\omega_0, \ldots, \omega_n)^T \, , \; g = \big((b-a),\, (b-a)^2/2\, , \ldots, (b^{n+1} - a^{n+1})/(n+1)\big)^T \, ,$$

und der Vandermonde-Matrix

$$V = (V_{jk})_{j,k=0}^{n} \, , \; V_{jk} = {x_j}^k \, .$$

Diese ist genau dann regulär, wenn die Stellen x_j paarweise verschieden sind. Nach Voraussetzung ist dies der Fall und das Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung w.

b) Zu obiger Zerlegung sei

$$Q(f) = \sum_{j=0}^{n} \sigma_j f(x_j) \quad , \quad \sigma_0, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{R} \, ,$$

eine beliebige Quadraturformel. Dann existiert stets ein Polynom $p \in \mathbb{P}_{2n+2}$ mit

$$Q(p) \neq \int_a^b p(x)\, dx \, .$$

Denn: Definiere zu der gegebenen Zerlegung

$$p(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)^2 \in \mathbb{P}_{2n+2} \, ,$$

dann gilt, da die Stützstellen gerade die Nullstellen von p sind,

$$Q(p) = \sum_{j=0}^{n} \sigma_j \prod_{k=0}^{n} (x_j - x_k)^2 = 0 \, ,$$

aber da zwischen den Stützstellen $p(x) > 0$ gilt, kann das Integral $\int_a^b p(x) dx$ nicht verschwinden. Es folgt hieraus:

Eine Quadraturformel, die $n+1$ Stützstellen verwendet, kann höchstens Polynome bis zum Grad $2n+1$ exakt integrieren.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 12.3 (*Alternative Zwei-Punkte-Formel)*.
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zu bestimmen sind Gewichte $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{R}$ sowie die Stelle $z \in [a, b]$ derart, dass die Quadraturformel

$$Q(f) = \omega_0 f(a) + \omega_1 f(z)$$

für alle Polynome vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten exakt ist.
Diese Forderung ist äquivalent dazu, dass die Funktionen $1, x, x^2$ exakt integriert werden. Daraus leiten sich die folgenden Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} \omega_0 + \omega_1 &= b - a \\ a\omega_0 + z\,\omega_1 &= \frac{b^2 - a^2}{2} \\ a^2\omega_0 + z^2\omega_1 &= \frac{b^3 - a^3}{3} \end{aligned}$$

Die Substitution $t = \dfrac{x - a}{b - a}$ ergibt

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) \int_0^1 f((b - a)t + a)\,dt\,,$$

und es genügt, den Fall $a = 0, b = 1$ zu betrachten. Dann vereinfacht sich das obige System zu

$$\begin{aligned} \omega_0 + \omega_1 &= 1 \\ z\,\omega_1 &= \frac{1}{2} \\ z^2\omega_1 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Einsetzen der zweiten in die dritte Gleichung ergibt $z = \dfrac{2}{3}$, dies in die zweite eingesetzt $\omega_1 = \dfrac{3}{4}$ und daraus erhält man mit der ersten Gleichung $\omega_0 = \dfrac{1}{4}$. Wegen $x = (b - a)t + a$ erhält man für das Intervall $[a, b]$:

$$z = \frac{2(b - a)}{3} + a = \frac{2b + a}{3}\,, \quad \omega_0 = \frac{b - a}{4}\,, \quad \omega_1 = \frac{3(b - a)}{4}\,.$$

- Vorteil: Bei einfacher Verwendung höhere algebraische Genauigkeit als Trapezregel bei gleichem Aufwand (zwei Funktionsauswertungen).
- Nachteil: Die summierte Regel ist doppelt so aufwendig wie die summierte Trapezregel: Für äquidistante Stützstellen mit Schrittweite h gilt z.B.

$$\begin{aligned} T_n(f) &= \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Big) = \mathcal{O}(n + 1) \\ Q_n(f) &= \frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_k) + 3f(x_k + 2h/3)\big) = \mathcal{O}(2n)\,. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 12.4 (*Simpson-Regel)*.
Unter Verwendung der Simpson-Regel

$$S(f) := (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

sollen die folgenden Integrale approximiert werden:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (x^3 + 2x^2 + 1)\,dx \quad \text{und} \quad I_2 = \int_{-a}^{a} xe^{x^2}\,dx \;\; (a > 0)\ .$$

Exakte Integralwerte: Wegen der Symmetrien in den Integranden und der Integrationsintervalle gilt

$$I_1 = 2\int_0^1 (2x^2+1)dx = \frac{10}{3}\,, \quad I_2 = 0\,.$$

Simpson-Approximation für I_1: Stützstellen sind -1, 0 und 1, daher

$$S_1 = 2\left(\frac{2}{6} + \frac{2}{3} + \frac{4}{6}\right) = \frac{10}{3} = I_1\,.$$

Simpson-Approximation für I_2: Stützstellen sind $-a$, 0 und a, daher

$$S_2 = 2a\left(-\frac{a}{6}\,e^{a^2} + \frac{a}{6}\,e^{a^2}\right) = 0 = I_2\,.$$

Erläuterung: I_1 wird exakt berechnet, da nach Konstruktion der Simpson-Regel Polynome bis zum Grad 2 exakt integriert werden. Dass I_2 exakt ausgewertet wird, liegt an den Symmetrien von Integrand, Integrationsbereich und der Quadraturformel, allgemein wird dies nicht der Fall sein.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 12.5 (*Quadratur für unbeschränkte Intervalle)*.
Sei $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft

$$\forall x \geq M \ : \ |f(x)| \leq \alpha \mathrm{e}^{-\beta x} \qquad (*)$$

mit $M \geq 0$ und $\alpha, \beta > 0$. Das Integral

$$I(f) = \int_0^\infty f(x)\,dx$$

existiert wegen $(*)$ und soll angenähert werden, indem die Trapezregel auf das Integral mit endlichem Integrationsintervall angewendet wird.

a) Mit der Voraussetzung über das Abklingverhalten von f berechnet man

$$I_\infty(f;X) = \int_X^\infty |f(x)|\,dx \overset{(*)}{\leq} \alpha \int_X^\infty e^{-\beta x}\,dx = \frac{\alpha}{\beta}e^{-\beta X}$$

b) Sei eine Fehlerschranke $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach Teil a) ist

$$I_\infty(f;X) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

auf jeden Fall erfüllt, wenn gilt

$$\frac{\alpha}{\beta}e^{-\beta X} \leq \frac{\epsilon}{2}\,,$$

und dies ist gleichbedeutend mit $X \geq X_\epsilon$, wobei

$$X_\epsilon = -\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\beta\epsilon}{2\alpha}\right)\ .$$

Der Approximationsfehler erfüllt

$$
\begin{aligned}
|I(f)-T_n(f)| &= \left|\int_0^X f(x)\,dx - T_n(f) + \int_X^\infty f(x)\,dx\right| \le \left|\int_0^X f(x)\,dx - T_n(f)\right| + \left|\int_X^\infty f(x)\,dx\right| \\
&\le |I_X(f)-T_n(f)| + I_\infty(f;X)\,,
\end{aligned}
$$

d.h. er setzt sich zusammen aus dem *Quadraturfehler* bei der Näherung des Integrals $I_X(f)$ und dem *Abschneidefehler*, der durch $I_\infty(f;X)$ nach oben beschränkt ist.

Wird also X_ϵ wie oben gewählt und wählt man die Anzahl n_ϵ der Stützstellen so, dass

$$|I_X(f)-T_n(f)| \le \frac{\epsilon}{2}$$

erfüllt ist, dann beträgt der Gesamtfehler höchstens ϵ.

Der Quadraturfehler der summierten Trapezregel mit Schrittweite h erfüllt

$$|I_X(f)-T_n(f)| \le \frac{X\,h^2}{12}\,\|f''\|_\infty\,,$$

wobei wie immer $\|g\|_\infty = \max_{x\in[0,X]}|g(x)|$.

Mit $X = X_\epsilon$ und $h = X_\epsilon/n_\epsilon$ folgt, dass die Forderung $|I_{X_\epsilon}(f) - T_{n_\epsilon}(f)| \le \dfrac{\epsilon}{2}$ gleichbedeutend ist mit

$$\boxed{n_\epsilon \ge \sqrt{\frac{\|f''\|_\infty\,X_\epsilon^3}{6\,\epsilon}}\,,\quad X_\epsilon = -\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\beta\epsilon}{2\alpha}\right)}$$

Man wählt also n_ϵ als die kleinste natürliche Zahl, für die diese Abschätzung richtig ist.

c) Die Funktion

$$f(x) = \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

erfüllt $(*)$ für $M = 0$ und $\alpha = \beta = 1$. Daraus folgt

$$X_\epsilon = \ln\frac{2}{\epsilon}$$

Es gilt ferner

$$f'(x) = \big(\cos(x)-\sin(x)\big)\mathrm{e}^{-x}\,,\quad f''(x) = -2\cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,,$$

und damit auf $[0, X_\epsilon]$

$$\|f''\|_\infty = f''(0) = 2\,.$$

Für $\epsilon = 10^{-2}$ erhält man dann aus b)

$$n_{0.01} \ge \sqrt{\frac{100\cdot(\ln(200))^3}{3}} \approx 70.412\,,$$

d.h. $n_{0.01} = 71$.