Wir Mathematiker und Physiker dürfen das stolze Bewusstsein hegen, dass wir ein Wissensgebiet unser eigen nennen, welches der Menschheit fortschreitend immer neuen äußeren Erfolg und innere Einsicht bietet, und diese Freude an unserem Besitz, die müssen wir und wollen wir, wenn sie uns je verloren gegangen sein sollte, wiedergewinnen!
Felix Klein
(1849-1925, deutscher Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Blatt 5 zur Vorlesung

Modellieren mit partiellen Differentialgleichungen

im Wintersemester 2018/19

Abgabe: Donnerstag, den 29. November 2018 *vor* der Vorlesung.

Aufgabe 5.1. (7 Punkte) Geben Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x + v_x &= 0 \\ v_t + u_x + 2v_x &= 0 \\ u(0,x) &= u_0(x) \\ v(0,x) &\equiv 0 \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise an und lösen Sie es anschließend.

Aufgabe 5.2. (5 Punkte) In der Vorlesung haben Sie zur numerischen Approximation der Transportgleichung

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

das Upwind-Verfahren kennengelernt. Eine alternative hierzu ist das sogenannte *Lax-Friedrich-Verfahren*. Es ist durch den diskreten Differenzenoperator $\mathcal{L}_{\tau h}$ gegeben, mit

$$(\mathcal{L}_{\tau h} u_h)_i^j = \frac{u_i^{j+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j)}{\tau} + a\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_{\tau h}$ den Operator $\mathcal{L}$ approximiert, d.h.

$$\max_{i,j} \left| (\mathcal{L}_{\tau h})_i^j - (\mathcal{L}u)(t_j, x_i) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{für } h, \tau \to 0, \text{ wenn } h^2/\tau \to 0.$$

Aufgabe 5.3. (5 + 1.5 + 1.5 = 8 Punkte) **Programmieraufgabe**
In dieser Aufgabe soll das Upwind-Verfahren zur Approximation der Transportgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

für $x \in [0,4]$ und $t > 0$ implementiert werden. Es sei

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - |x-1| & , \quad \text{für } x \in [0,2] \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und $a = 1$. Wählen Sie periodische Randbedingungen für u, $u(t,0) = u(t,4)$, $t \geq 0$.

(a) Schreiben Sie ein C-Programm, das die Approximation $u_h(T, x_i)$ berechnet, wobei $T > 0$ ein fester Zeitpunkt und $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$ die Diskretisierung von $[0, 4]$ mit Schrittweite $h = 4/N$ ist. Wählen Sie als Zeitschrittweite $\tau = T/M$, wobei M die Anzahl der Zeitschritte ist.

(b) Verwenden Sie die Parameter $N = 25$, $M = 8$ und $T = 1$. Plotten Sie in jedem Zeitschritt die exakte Lösung. Plotten Sie anschließend ebenfalls die Approximationen in jedem Zeitschritt. Was fällt Ihnen auf?

(c) Nun wählen wir $T = 1$ und $M = 15$. Wir wollen die Konvergenz des Verfahrens überprüfen. Plotten Sie hierzu die exakte Lösung sowie die Approximationen $u_h(T, x)$ für $N = 10, 20, 40$ in einen gemeinsamen Graphen. Als nächstes plotten Sie die exakte Lösung zusammen mit der Approximation für $N = 80$. Haben Sie das Ergebnis erwartet? Warum sieht es so aus?

Speichern Sie die insgesamt vier Plots aus b) und c) als Graphik-Dateien und senden Sie sie zusammen mit ihren Quelltexten bis spätestens 29. November 2018 vor der Vorlesung an `kessler@num.uni-sb.de`. Vergessen Sie nicht die Namen Ihrer Gruppenmitglieder in die E-Mail zu schreiben. Geben Sie zusätzlich einen Ausdruck der Plots und die Antworten zu b) und c) mit Ihrer Ausarbeitung der Übungsaufgaben vor der Vorlesung ab.

Hinweise zu Programmieraufgaben

Die Programmieraufgaben sind in der Programmiersprache C zu lösen und bis spätestens zum Abgabetermin vor der Vorlesung per E-Mail an

`kessler@num.uni-sb.de`

zu senden. Die Aufgaben können auf dem privaten Rechner gelöst werden. Wer diese Möglichkeit nicht hat, dem steht am Lehrstuhl ein Arbeitsplatz zur Verfügung. In solchen Fällen wenden Sie sich bitte an Torsten Keßler (Geb. E1.1 Raum 3.28).
