Reading and writing are considered an integral part of our civilization. I believe that the next interesting things that come along after reading and writing were math and science. ... It's not to learn the facts of science that's so important, but for people to learn the epistemology of science: The stance about the world ans about knowledge that science takes, about argument and how you settle argument, how you find out new things and so forth, are vitally important and directly connected to our political process.
Alan Kay
(*1940, US-amerikanischer Informatiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Blatt 6 zur Vorlesung

Modellieren mit partiellen Differentialgleichungen

im Wintersemester 2018/19

Abgabe: Donnerstag, den 6. Dezember 2018 *vor* der Vorlesung.

Aufgabe 6.1. (5 Punkte) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\,\frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass nur dann eine klassische Lösung für alle $t > 0$ existiert, wenn die Funktion a monoton wachsend ist.
Sei nun a auf mindestens einem kleinen Intervall monoton fallend. Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt, bis zu dem die Lösung klassisch ist durch

$$t^* = -\left(\min_{y\in\mathbb{R}} \frac{d}{dy} a(u_0(y))\right)^{-1}$$

gegeben ist.

Aufgabe 6.2. (3 Punkte)
Berechnen Sie mit Hilfe der letzten Aufgabe den Zeitpunkt t^* für das folgende Beispiel aus der Vorlesung (*Bürgers-Gleichung*)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kommentieren Sie auf Grund ihres Ergebnisses die Abbildung 3.5 aus dem Vorlesungsskript (siehe `www.num.uni-sb.de/rjasanow`).

Aufgabe 6.3. (1 + 1 + 3 = 5 Punkte)
In der Vorlesung haben Sie zur numerischen Approximation der Transportgleichung

$$\mathcal{L}u = u_t + au_x = 0 \quad a > 0,$$

mit dem Differentialopperator $\mathcal{L}$, das Upwind-Verfahren kennengelernt. Dieses besitzt den Differenzenoperator $\mathcal{L}_{\tau h}$ mit

$$(\mathcal{L}_{\tau h} u_h)_i^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + a\frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h}$$

wobei τ die Zeitschrittweite und h die Gitterschrittweite bezeichnet. In seiner semidiskreten Form auf dem räumlichen Gitter $h\mathbb{Z}$ hat es die Form

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i = -a\frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass die semidiskrete Formulierung für $h \to 0$

(a) in erster Ordnung den Transportoperator

$$\mathcal{L} = u_t + au_x$$

approximiert,

(b) und in zweiter Ordnung die Konvektions-Diffusions-Gleichung

$$u_t + au_x - h\frac{a}{2}u_{xx} = 0$$

approximiert.

(c) Zeigen Sie, dass

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2h\,a\,t}}\right)\right), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= h\frac{a}{2}u_{xx} \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) &= H(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

punktweise erfüllt, wobei

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0\,, \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

und

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}\,\mathrm{d}z$$

ist. Welche Aussage können Sie über die Auflösung von Schocks durch das Upwind-Verfahren treffen? Um wie viel kleiner muss man h wählen, damit die Auflösung verdoppelt wird?

Aufgabe 6.4. (1 + 2 + 2 + 2 = 7 Punkte) In dieser Aufgabe wollen den in Aufgabe 3 theoretisch untersuchten Diffusionsterm numerisch untersuchen. Dazu betrachten wir das Anfangswertproblem

$$u_t + u_x = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times (0,1)$$

mit der Randbedinung $u(t,0) = 1$ und der Anfangsbedinung

$$u(0,x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1/3 \\ 0 & x > 1/3 \end{cases}$$

(a) Passen Sie Ihre Upwind-Implementierung oder die der Musterlösung an das neue Anfangswertproblem an.

(b) Implementieren Sie die Bestimmung der Halbwertsbreite der numerischen Approximation u_h an den Schock. Starten Sie dazu im Position des Schocks x_0 und finden Sie ausgehend davon das erste x_1, an dem $|u_h(x_1) - 1| <$ `eps` für eine Schranke `eps` ist. Die Halbwertsbreite berechnet sich dann zu $2|x_1 - x_0|$.

(c) Wählen Sie als Endzeit $T = \frac{1}{6}$, `eps` $= 10^{-2}$ und die Anzahl der Zeitschritte als $M = 2^{12}$. Wählen Sie als die Anzahl der räumlichen Intervalle jeweils 2^i, $i = 4, \ldots, 14$ und geben Sie für jede Wahl h und die Halbwertsbreite der Approximation zum Zeitpunkt T aus.

(d) Plotten Sie die Halbwertsbreite gegen die Gitterschrittweite im log-log-Diagramm. Führen Sie eine linerare Anpassung an die Daten durch. Speichern Sie den Plot samt Gerade und sinnvoller Beschriftung ab. Deckt sich das Ergebnis mit den Resultaten aus Aufgabe 3?

Schicken Sie Ihren Quellcode und den Plot aus Teil (d) bis Donnerstag, den 6. Dezember 2018 an `kessler@num.uni-sb.de`.
Hinweis: Die Musterlösung der vorherigen Programmieraufgabe wird Ihnen auf Nachfrage an `kessler@num.uni-sb.de` zugeschickt.