Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.
Georg Cantor
(1845-1918, deutscher Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Blatt 8 zur Vorlesung
Modellieren mit partiellen Differentialgleichungen
im Wintersemester 2018/19

Abgabe: Donnerstag, den 20. Dezember 2018 *vor* der Vorlesung.

Aufgabe 8.1. (1 + 2 + 1 + 1 + 3 = 8 Punkte)
Wir untersuchen das hyperbolische System

$$u_t + \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} u_x = 0 \quad \text{auf} \quad \Omega = \{(t,x) \mid 0 \le x \le 1,\ t > 0\} \tag{1}$$

wobei $u = u(t,x) = (u^1(t,x), u^2(t,x))^\top$ ist. Die Anfangsdaten seien

$$u^1(0,x) = 0 \quad \text{und} \quad u^2(0,x) = x \quad \text{für } x \in [0,1]$$

und die Randdaten wählen wir als

$$u^1(t,0) = t \quad \text{und} \quad u^2(t,1) = 0 \quad \text{für } t > 0.$$

(a) Entkoppeln Sie das System (1), so dass Sie ein System in der Form

$$w_t + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} w_x = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \quad t > 0 \tag{2}$$

erhalten.

(b) Berechnen Sie die Charakteristiken von (2) und skizzieren Sie diese zusammen mit dem Gebiet Ω. Geben Sie außerdem den Eintrittsrand Γ_- der einzelnen Charakteristiken an.

(c) Bestimmen Sie die Anfangsdaten für das in (a) gefundene entkoppelte System.

(d) Die Randdaten für (2) sollen in der Form

$$\begin{aligned} w^1 &= -w^2 + \beta_0(t) \quad \text{bei } x = 0 \\ w^2 &= w^1 + \beta_1(t) \quad \text{bei } x = 1 \end{aligned}$$

angegeben werden. Bestimmen Sie hierzu die Funktionen $\beta_0, \beta_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ für das in dieser Aufgabe betrachtete Problem.

(e) Berechnen Sie $u(t,x)$ in den Punkten $(t,x) = (1/6, 2/3)$, $(1/3, 5/6)$ und $(1/3, 1/3)$.

Aufgabe 8.2. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Laplace-Gleichung rotationssymmetrisch ist, d.h. falls $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ harmonisch ist, so gilt für

$$v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, x \mapsto u(Ox)$$

mit einer orthogonalen Matrix $O \in \mathbb{R}^{d \times d}$, dass

$$\Delta v = 0.$$

Aufgabe 8.3. (5 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $T > 0$ und $\Gamma_p = [0,T] \times \partial\Omega \cup \{0\} \times \Omega$ der parabolische Rand. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } (0,T] \times \Omega, \\ u = g & \text{auf } \Gamma_p, \end{cases}$$

für gegebene glatte Daten f, g. Geben Sie einen alternativen Beweis zur Eindeutigkeit des obigen Randwertproblems.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $f = 0, g = 0$. Was können Sie über $t \mapsto \|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}$ aussagen?

Aufgabe 8.4. (1 + 2 = 3 Punkte)
Sei u eine Lösung von $u_t = \Delta u$ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$.

(a) Zeigen Sie, dass auch $u_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$u_\lambda(t,x) = u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d,$$

die Wärmeleitungsgleichung löst.

(b) Zeigen Sie mit (a), dass auch

$$v(t,x) = 2t u_t(t,x) + x \cdot \nabla u(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d,$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.