Der Wissenschaftler findet seine Belohnung in dem, was Poincaré die Freude am Verstehen nennt, nicht in den Anwendungsmöglichkeiten seiner Erfindung.
Albert Einstein
(1879-1955, deutscher Physiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Blatt 9 zur Vorlesung
Modellieren mit partiellen Differentialgleichungen
im Wintersemester 2018/19

Abgabe: Donnerstag, den 10. Januar 2019 *vor* der Vorlesung.

Aufgabe 9.1. (1 + 4 = 5 Punkte) In dieser Aufgabe soll das folgende Theorem gezeigt werden:

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0, \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) &= u_0, \quad \text{in } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

besitzt höchstens eine Lösung, die für beliebiges $T > 0$ in $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ beschränkt ist.

Für den Beweis des Theorems reicht es die folgende Aussage zu zeigen: Für die einzige beschränkte Lösung u von

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, \quad \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) &= 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

mit $|u| \leq M$ gilt, dass für einen beliebigen Punkt (t_0, x_0) in $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|u(t_0,x_0)| \leq \varepsilon$ erfüllt ist.

(a) Begründen Sie, warum es genügt die obere Aussage zu zeigen.

(b) Beweisen Sie das Theorem.
Hinweis: Untersuchen Sie die Hilfsfunktionen

$$h_\pm(t,x) = -\varepsilon w(t,x) \pm u(t,x) \quad \text{mit} \quad w(t,x) = \frac{|x|^2 + 2dt}{|x_0|^2 + 2dt_0}$$

auf dem Gebiet $(0,T)\times\Omega$ mit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < R\}$ und $R^2 = \max\{|x_0|^2,\, M(|x_0|^2 + 2dt_0)/\varepsilon\}$.

Aufgabe 9.2. (2 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$u : [0,\infty)\times\mathbb{R}, (t,x) \mapsto \begin{cases} xt^{-3/2}e^{-x^2/4t}, & \text{für } t > 0 \\ 0, & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass u eine Lösung von

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}$$

ist und dass für jedes feste x

$$u(t,x) \to 0 \quad \text{für } t \to 0$$

gilt. Weshalb ist dies kein Gegenbeispiel für das Eindeutigkeitsresultat aus Aufgabe 9.1?

Aufgabe 9.3. (5 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit C^1-Rand Γ. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + \alpha(x)u(x) &= f(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma, \end{aligned}$$

wobei $f \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\Gamma)$ und $\alpha \in L_\infty(\overline{\Omega})$ mit $0 < \alpha_{\min} \leq \alpha(x) \leq \alpha_{\max}$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

(a) Leiten Sie die Variationsformulierung des Problems auf $H^1(\Omega)$ her.

(b) Zeigen Sie, dass das Variationsproblem eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 9.4. (3 + 5 = 8 Punkte) In dieser Programmieraufgabe betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{in } [0,T] \times [0,1] \\ u(0,x) &= \varphi(x) && \text{für } x \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) &= 0 && \text{für } t \in [0,T] \end{aligned}$$

wobei $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$ mit der exakten Lösung $u(t,x) = e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$. Sei τ die Zeitschrittweite und $h = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$ die Schrittweite in der Variablen x.

(a) Implementieren Sie das explizite Schema und berechnen Sie im Punkt $x_i = 1/4$ den absoluten Fehler $e = |u(t_j, x_i) - u_i^j|$ zum Zeitpunkt $t_j = T$. Hierbei wählen Sie $\tau = 0.001$ und $T = 0.015$. Erstellen Sie eine Tabelle mit den jeweiligen Fehlern zu den Diskretisierungen $k = 2, \ldots, 8$. Plotten Sie die exakte Lösung und die Approximationen für $k = 3, 4, 5$ im Bereich $x \in [0.2, 0.3]$. Anschließend plotten Sie noch die Approximation für $k = 6$.

(b) Implementieren Sie das Crank-Nicolson-Verfahren und erstellen Sie die entsprechende Tabelle wie im Aufgabenteil a). Vergleichen Sie die beiden Tabellen und interpretieren Sie, was Sie sehen. Plotten Sie die exakte Lösung und die Approximationen für $k = 3, 4, 5, 6, 7$ im Bereich $x \in [0.2, 0.3]$.

Speichern Sie die insgesammt drei Plots aus a) und b) als Grafikdateien und senden Sie sie zusammen mit ihren Quelltexten bis spätestens 10. Januar 2019 vor der Vorlesung an `kessler@num.uni-sb.de`. Vergessen Sie nicht die Namen Ihrer Gruppenmitglieder in die E-Mail zu schreiben. Geben Sie die Tabellen sowie die Interpretation zusammen mit Ihrer Ausarbeitung der Übungsaufgaben vor der Vorlesung ab.