*Ein guter mathematischer Scherz ist immer besser als zehn normale mathematische Aufgaben.*
John Edensor Littlewood
(1885-1977, englischer Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

## Blatt 10 zur Vorlesung
# Modellieren mit partiellen Differentialgleichungen
## im Wintersemester 2018/19

Abgabe: Donnerstag, den 17. Januar 2019 *vor* der Vorlesung.

**Aufgabe 10.1. (2 + 2 = 4 Punkte)** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(i) $u$ ist auf $\Omega$ harmonisch.

(ii) $u$ hat die *Mittelwerteigenschaft* auf $\Omega$, d.h. $u \in C(\Omega)$ und für jedes $x \in \Omega$ und jedes $r > 0$ mit $B_r(x) \subset\subset \Omega$ ist

$$u(x) = \frac{1}{r^{d-1}\omega_d} \int\limits_{|y-x|=r} u(y)\, dS_y \quad \textit{(Mittelwertrelation).}$$

(iii) $u \in C(\Omega)$ und

$$\int_{B_r(x)} (u(x) - u(y))\, dy = 0 \quad \text{für alle } B_r(x) \subset\subset \Omega.$$

Hierbei bezeichnet $U \subset\subset V$ für $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen den Fall $U \subset \bar{U} \subset V$ und $\omega_d$ den Flächeninhalt der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^d$.

(a) Zeigen Sie (ii) $\Rightarrow$ (iii). *Hinweis: multipliziere mit $\omega_d r^{d-1}$ und integriere über $r$.*

(b) Zeigen Sie (iii) $\Rightarrow$ (ii) für $d = 2$. *Hinweis: Differenziere nach $r$.*

**Aufgabe 10.2. (5 Punkte)** Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen heißt $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ subharmonisch, falls $-\Delta v \le 0$ in $\Omega$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v,$$

falls $\Omega$ beschränkt ist.
*Hinweis*: Zeigen Sie, dass $v_\varepsilon = v + \varepsilon|x|^2$ für alle $\varepsilon > 0$ das Maximum über $\bar{\Omega}$ nicht im Inneren annimmt.

**Aufgabe 10.3. (5 Punkte)** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $f \in C(\bar{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$. Es sei $u$ die glatte Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es eine nur von $\Omega$ abhängige Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \le C \left( \max_{\partial\Omega} |g| + \max_{\bar{\Omega}} |f| \right).$$

*Hinweis*: Mit $\lambda = \max_{\bar{\Omega}} |f|$ gilt $-\Delta(u + \frac{|x|^2}{2d}\lambda) \le 0$.

**Aufgabe 10.4. (2 + 4 = 6 Punkte)** Zeigen Sie die Verallgemeinerung der Mittelwerteigenschaft

$$u(0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(0)} g \,\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi} \int_{B_r(0)} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{r} \right) f(x) \,\mathrm{d}x$$

für die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } B_r(0), \\ u &= g \quad \text{auf } \partial B_r(0) \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}^3$ für $r > 0$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Sei

$$\phi : (0, r] \to \mathbb{R}, s \mapsto \frac{1}{4\pi s^2} \int_{\partial B_s(0)} u \,\mathrm{d}S.$$

Zeigen Sie, dass $\phi$ differenzierbar ist mit

$$\phi'(s) = -\frac{1}{4\pi s^2} \int_{B_s(0)} f \,\mathrm{d}x, \qquad s \in (0, r)$$

und sich stetig in 0 mit $\phi(0) = u(0)$ fortsetzen lässt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\phi(r) - \phi(0) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^r \int_0^s \frac{1}{s^2} \int_{\partial B_t(0)} f \,\mathrm{d}S_z \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s.$$

Schließen sie durch Umparametrisierung der Integration über $s$ und $t$ auf

$$\phi(r) - \phi(0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^r \int_{\partial B_t(0)} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{t} \right) f(z) \,\mathrm{d}S_z \,\mathrm{d}t.$$

Folgern Sie daraus die Behauptung.