In zweifelhaften Fällen entscheide man sich für das Richtige.
Karl Kraus
(1874-1936, österreichischer Schriftsteller)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Blatt 11 zur Vorlesung
Modellieren mit partiellen Differentialgleichungen
im Wintersemester 2018/19

Abgabe: Donnerstag, den 24. Januar 2019 *vor* der Vorlesung.

Aufgabe 11.1. (5 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und $u \in C^2(\Omega)$ erfülle die Mittelwerteigenschaft, d.h. für alle $B_r(x) \subset\subset \Omega$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x)} u \, \mathrm{d}S.$$

Zeigen Sie, dass u harmonisch ist.

Aufgabe 11.2. (5 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen in $C^2(\Omega)$, die kompakt gleichmäßig gegen eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ konvergiert. Zeigen Sie, dass u harmonisch ist.

Aufgabe 11.3. (5 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Zeigen Sie, dass u keine isolierten Nullstellen hat.

Aufgabe 11.4. (5 Punkte) Es seien $B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ und u eine positive harmonische Funktion auf $B_r(0)$. Zeigen mithilfe des Poisson-Integrals für die Kugel die Abschätzungen

$$r\frac{r-|x|}{(r+|x|)^2}u(0) \le u(x) \le r\frac{r+|x|}{(r-|x|)^2}u(0)$$

für alle $x \in B_r(0)$.