Die Fähigkeit, mathematisch zu denken, wird einmal ebenso selbstverständlich sein wie heute das Lesenkönnen. Eine solche Änderung mag manchem phantastisch erscheinen. Aber die allgemeine Verbreitung von Lesen und Schreiben war vor einigen Jahrhunderten auch noch eine Utopie.
Walter Warwick Sawyer
(1911-2008, englischer Mathematik-Didaktiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Blatt 12 zur Vorlesung

Modellieren mit partiellen Differentialgleichungen

im Wintersemester 2018/19

Abgabe: Donnerstag, den 31. Januar 2019 *vor* der Vorlesung.

Aufgabe 12.1. (3 Punkte) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge mit C^1–Rand und $u \in C^4(\bar{\Omega})$ erfülle

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta u) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $u = 0$.
Hinweis: Zweite Greensche Formel.

Aufgabe 12.2. (1 + 3 + 3 = 7 Punkte) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und $u \in C(\Omega)$. Zeigen Sie, dass wenn u die Mittelwerteigenschaft

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x)} u \,\mathrm{d}S$$

für alle $B_r(x) \subset\subset \Omega$ erfüllt, so gilt $u \in C^2(\Omega)$ und $\Delta u = 0$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie für $B_r(x) \subset\subset \Omega$ Existenz einer eindeutigen Lösung $v \in C^2(B_r(x)) \cap C(\bar{B}_r(x))$ von

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{in } B_r(x), \\ v &= u \quad \text{auf } \partial B_r(x). \end{aligned}$$

(b) Sei $w = u - v$. Zeigen Sie unter der Annahme $w > 0$ in einem Punkt in $B_r(x)$, dass

$$K = \{y \in B_r(x) : w(y) = \max_{\bar{B}_r(x)} w\}$$

nicht-leer und kompakt ist und nicht-leeren Rand ∂K besitzt.

(c) Was können Sie für $y \in \partial K$ über $w(y)$ mithilfe der Mittelwerteigenschaft sagen? Folgern Sie daraus einen Widerspruch und schließlich die Behauptung.

Aufgabe 12.3. (5 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $u \in C(\Omega)$ konvergieren und auf kompakten Teilmengen von Ω gleichmäßig beschränkt sind. Zeigen Sie, dass u harmonisch ist.

Aufgabe 12.4. (5 Punkte) Es sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge monoton fallender harmonischer Funktionen, so dass $(u_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion konvergiert.