Kapitel 1

Einführung

1.1 Differentialgleichungen

Differentialgleichungen stellen Zusammenhänge zwischen einer gesuchten Funktion und deren Ableitungen in der Weise her, daß die Funktion selbst aus diesen Gleichungen heraus bestimmt werden kann. Man unterscheidet zwischen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Typische gewöhnliche Differentialgleichungen sind:

Beispiel 1.1.1.

(a) $u' = u, \quad u(0) = 1$,
mit der Lösung $\quad u(x) = e^x$ *;*

(b) $u' = u^2$,
mit der allgemeinen Lösung $u(x) = -\frac{1}{x+c}, c \in \mathbb{R}$;

(c) $u'' + u' = x^2$
mit der allgemeinen Lösung $u(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

Hierbei sind a) und b) Differentialgleichungen erster Ordnung und c) zweiter Ordnung. Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste auftretende Ableitungsordnung.
Typische partielle Differentialgleichungen sind:

Beispiel 1.1.2.

(a) *Laplace-Gleichung*
$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *;*

(b) *Wellen-Gleichung*
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *;*

(c) *Wärmeleitungsgleichung*
$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *;*

(d) *Transportgleichung*
$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

(e) *Bürgers-Gleichung*
$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

(f) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3$;

(g) $\frac{\partial u}{\partial t} + (x^2 + t^2)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t)$;

(h) *Cauchy-Riemann'sche Gleichungen*
$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Die Gleichungen d), g) sowie das System h) sind von der ersten Ordnung, a), b), c), e) und f) von der zweiten. Von sogenannten variablen Koeffizienten spricht man, wenn Funktionen als Koeffizienten auftreten, die nicht von der gesuchten Funktion (z. B. u) abhängen, aber von den unabhängigen Variablen wie t, x oder y. Ein Bespiel ist die Gleichung g). Eine solche Differentialgleichung heißt inhomogen, wenn sie additive Terme enthält, die nicht von der gesuchten Funktion abhängen, siehe Beispiel 1.1.1c) und 1.1.2g).
Die inhomogene Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

heißt Poisson-Gleichung.
Ein wesentliches Merkmal der Differentialgleichungen ist die Linearität bzw. Nichtlinearität. Jede Differentialgleichung kann in der Form

$$\mathcal{L}(u) = f \tag{1.1}$$

geschrieben werden, wobei $\mathcal{L}$ den Differentialoperator und f die rechte Seite bezeichnen. Mit dieser Funktion geht 1.1.1a) in die Operatorform über mit

$$\mathcal{L}(u) = u' - u\,, \quad f = 0\,;$$

1.1.1c) mit

$$\mathcal{L}(u) = u'' + u'\,, \quad f = f(x) = x^2;$$

1.1.2e) mit

$$\mathcal{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad f = 0$$

usw.
Eine Gleichung der Form (1.1) heißt linear, wenn

$$\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathcal{L}(u) + \beta\mathcal{L}(v)$$

für beliebige Konstanten α, β und beliebige „zulässige“ Funktionen u und v gilt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so heißt der Operator $\mathcal{L}$ und die Gleichung nichtlinear. Die Differentialgleichung 1.1.1a) ist linear, denn es gilt

$$\mathcal{L}\left(\alpha u + \beta v\right) = \left(\alpha u + \beta v\right)' - \left(\alpha u + \beta v\right) = \alpha\left(u' - u\right) + \beta\left(v' - v\right) = \alpha\mathcal{L}\left(u\right) + \beta\mathcal{L}\left(v\right).$$

Die Bürgers-Gleichung 1.1.2e) ist nichtlinear

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\alpha u + \beta v\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha u + \beta v\right) + \left(\alpha u + \beta v\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha u + \beta v\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha u + \beta v\right) \\ &= \alpha\mathcal{L}(u) + \beta\mathcal{L}(v) + \underbrace{\left(\alpha u + \beta v\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha u + \beta v\right) - \alpha u\frac{\partial u}{\partial x} - \beta v\frac{\partial v}{\partial x}}_{\neq 0}\end{aligned}$$

Die Gleichung 1.1.2f) ist auch nichtlinear.

1.2 Die Lösung

Wir betrachten zuerst ein gewöhnliches Anfangswertproblem

$$u' = -u\,, \quad u(0) = u_0$$

mit der Lösung $u(x) = u_0\, e^{-x}$. In der Tat erhält man

$$u'(x) = u_0\, e^{-x}\,(-1) = -u_0\, e^{-x} = -u(x)$$

und

$$u(0) = u_0\, e^{-0} = u_0.$$

Damit ist die Richtigkeit der Lösung durch einfaches Einsetzen in die Gleichung überprüft worden.
Die Differentialgleichung ist in der Regel durch die mathematische Modellbildung hergeleitet, z. B. Anfangsbevölkerungsdichte durch eine Zählung oder Messung. Es stellt sich die Frage, ob die Lösung stabil ist, d. h. daß geringfügige Änderungen von u_0 als Anfangsdaten kleine Änderungen der Lösung verursachen.

Beispiel 1.2.1.
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$v' = -v\,, \quad v(0) = u_0 + \varepsilon\,,$$

wobei ε „klein“ ist. Die Lösung

$$v(x) = (u_0 + \varepsilon)\, e^{-x}$$

unterscheidet sich in der Tat wenig von der Lösung u:

$$|u(x) - v(x)| = |\varepsilon| e^{-x}.$$

Der Abstand nimmt sogar mit x exponentiell ab.

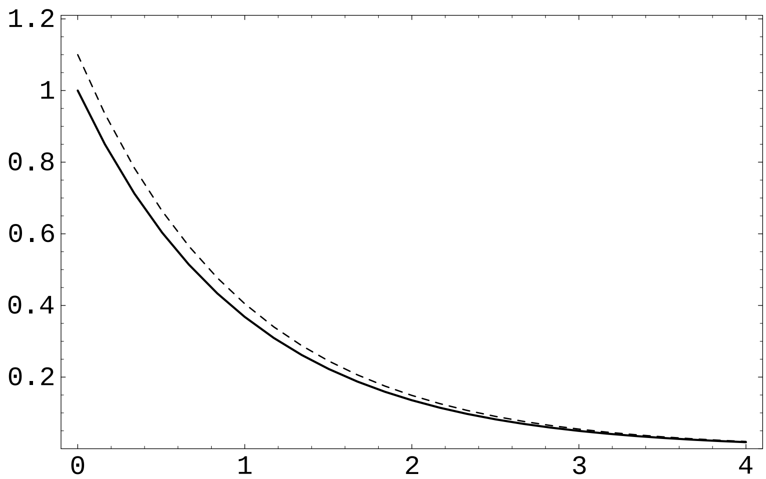


Abbildung 1.1: Die „exakte“ Lösung u und die „gestörte“ Lösung v (Strichlinie) für $\varepsilon = 10^{-1}\,, \quad x \in [0,4]$.

Beispiel 1.2.2.
Wir betrachten das nichtlineare Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u' &= xu(u-2) \quad \textit{(trennbare DGL)},\\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

mit der analytischen Lösung

$$u(x) = \frac{2u_0}{u_0 + (2-u_0)e^{x^2}}\,.$$

Für $u_0 = 2$ ist die Lösung konstant $u(x) = 2$.
Für $u_0 < 2$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = 0\,,$$

was eine starke Abweichung von der „exakten“ Lösung darstellt. Für $u_0 > 2$ entwickelt die Lösung an der Stelle

$$x^* = \left(\ln \frac{u_0}{u_0 - 2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \lim_{x\to x^*} u(x) = \infty$$

eine Singularität und damit eine unendlich große Abweichung.

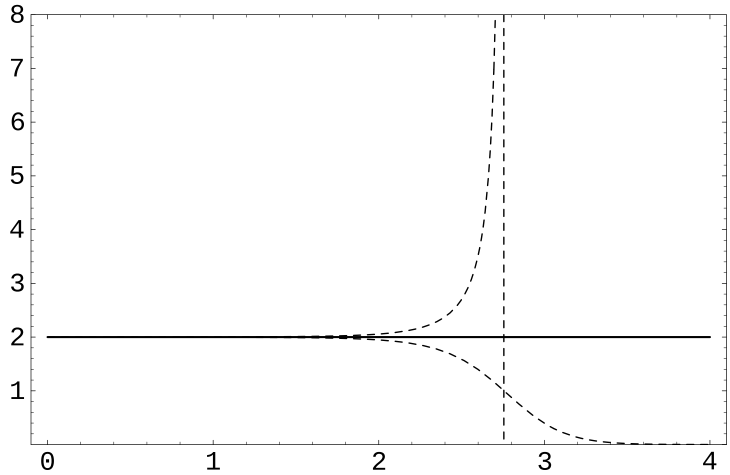


Abbildung 1.2: Die drei Lösungen für $u_0 = 2$ und $u_0 = 2 - 10^{-3}\,, \quad u_0 = 2 + 10^{-3}$. Die Singularität ist an der Stelle $x^* = (\ln 2001)^{\frac{1}{2}} \approx 2.76\,, \quad x \in [0, 4]$.

Damit ist das Anfangswertproblem für $u_0 = 2$ sehr instabil.

Die Lösung, die beim Einsetzen in die Differentialgleichung diese exakt erfüllt, heißt klassisch oder glatt. Wir werden bald auch die sog. schwachen Löungen kennenlernen.

Beispiel 1.2.3.
Sei $\overline{\Omega} = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ ein Gebiet und $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$, eine sog. Testfunktion. Für eine differenzierbare (und damit stetige und integrierbare) Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx$$

die Formel der partiellen Integration. Für $u(x) = 1 - |x|\,, \quad x \in [-1, 1]$ gilt

$$\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^{1} w(x)\varphi(x)dx\,, \quad \forall \varphi \text{ (Übung)}$$

mit

$$w(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0, \\ -1, & 0 < x \le 1, \\ \alpha, & x = 0, \end{cases}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Damit ist w nicht nur eine unstetige Funktion sondern eine Äquivalenzklasse der Funktionen, die sich an der Stelle $x = 0$ unterscheiden. Diese Äquivalenzklasse nennt man schwache oder verallgemeinerte Ableitung der Funktion u.

1.3 Numerische Approximation

Es ist wichtig zu verstehen, daß meistens numerische Methoden benötigt werden, um die Werte der Lösung einer gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichung zu finden. Die analytischen Lösungsmöglichkeiten sind sehr beschränkt. Bei numerischen Verfahren spielen die Konvergenz und die Genauigkeit eine wichtige Rolle. Für ein Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y)\,, \quad x_0 \le x \le X\,, \quad y(x_0) = y_0$$

kann man z. B. das Euler-Verfahren einsetzen. Dabei wird das Gebiet $\overline{\Omega} = [x_0, X]$ diskretisiert:

$$x_k = x_0 + hk\,, \quad k = 0, \ldots, n, \quad h = \frac{X - x_0}{n}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

und die Näherungen y_k für die exakten Werte $y(x_k)$ wie folgt berechnet:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)\,, \quad k = 0, \ldots, n-1\,.$$

Man benutzt dabei die Anfangsbedingung y_0. Für eine auf

$$G = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_0 \le x \le X\,, \quad y \in \mathbb{R}\big\}$$

bzgl. y Lipschitz-stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}$, d. h.

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le L|y - z|\,, \quad L > 0\,,$$

konvergiert das Euler-Verfahren

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le k\le n} |y_k - y(x_k)| = 0$$

und hat die 1. Ordnung der Genauigkeit

$$\max_{0\le k\le n} |y_k - y(x_k)| \le ch^1 = c\frac{X - x_0}{n}\,.$$

Beispiel 1.3.1.
Wir betrachten das AWP

$$y' = y\,, \quad y(0) = 1$$

mit der analytischen Lösung $y(x) = e^x$ *auf dem Intervall* $[0,1]$. *Das Euler-Verfahren führt auf*

$$y_{k+1} = y_k + hy_k = (1+h)y_k = \ldots = (1+h)^{k+1}y_0 = (1+h)^{k+1}$$

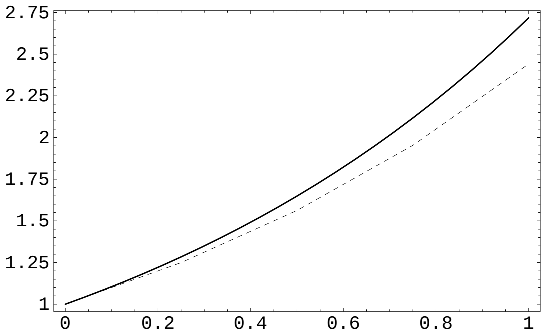
und damit

$$y_n = (1+h)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Die Analysis liefert für $y(1) = e$

$$\lim_{n\to\infty} |y_n - y(1)| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| = 0$$

Das zeigt die Konvergenz des Euler-Verfahrens an der Stelle $X = 1$.



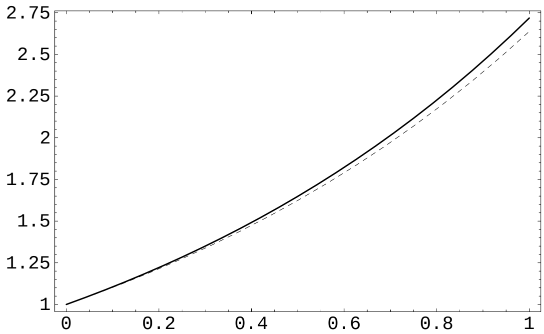


Abbildung 1.3: Analytische und numerische Lösung (Strichlinie) für $n = 4$ und $n = 16$.

Die numerische Konvergenz ist in der Tabelle 1.1 dargestellt. Dabei bezeichnet

$$E_n = \max_{0\le k\le n} |y_k - y(x_k)|$$

den Fehler,

$$CF = E_{n/4}/E_n$$

den Konvergenzfaktor und

$$C_n = E_n/h$$

die „Konstante“.

n	E_n	CF	C_n
4	$2.71 \cdot 10^{-1}$	$-$	1.12
16	$8.04 \cdot 10^{-2}$	3.44	1.28
64	$2.09 \cdot 10^{-2}$	3.85	1.34
256	$5.29 \cdot 10^{-3}$	3.95	1.35
1024	$1.33 \cdot 10^{-3}$	3.98	1.36
4096	$3.32 \cdot 10^{-4}$	4.01	1.36

Tabelle 1.1: Konvergenz des Euler-Verfahrens.

Es ist ersichtlich, daß der Fehler von der ersten Ordnung ist und asymptotisch wie

$$E_n \approx 1.36h\,, \quad h \to 0$$

gegen Null konvergiert.