# Kapitel 2

# Mathematische Grundlagen

Wir werden einige grundlegende Begriffe aus der linearen Algebra, Analysis und Funktionalanalysis benötigen.

## 2.1 Lineare Algebra

Wir beschränken uns auf reell- oder komplexwertige Vektoren und Matrizen, d. h. auf die Vektorräume $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$.

1) $n$ linear und unabhängige Vektoren

$$v_1\,,\, v_2\,,\, \ldots\,,\, v_n \in \mathbb{V}$$

bilden in $\mathbb{V}$ eine Basis, d. h.

$$\forall x \in \mathbb{V}\, \exists!\, \alpha_1\,, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ mit } x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\,,$$

wobei $\mathbb{K}$ der Zahlenkörper ist ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

2) Sei A eine $n \times n$-Matrix. $A$ ist regulär, wenn

$$\det A \neq 0$$

gilt. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $A$ ist regulär,
- die Spalten von $A$ bilden eine Basis,
- die Zeilen von $A$ (als Spaltenvektoren betrachtet) bilden eine Basis,
- die homogene Gleichung $Ax = 0$ hat die eindeutige Lösung $x = 0$,
- das System $Ax = b$ ist lösbar,
- $\exists\, A^{-1}$ die inverse Matrix mit $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Analog gilt für eine singuläre Matrix mit $\det A = 0$, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- $A$ ist singulär,
- die Spalten von $A$ sind linear abhängig,
- die homogene Gleichung $Ax = 0$ hat nichttriviale Lösungen,
- das System $Ax = b$ besitzt unter Umständen keine Lösung, andernfalls ist die Lösung nicht eindeutig,
- es existiert keine inverse Matrix.

3) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Das euklidische Skalarprodukt ist definiert durch

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j \in \mathbb{R}\,, \quad (x,y) = y^T x\,,$$

Es gilt:

- $(x,x) \geq 0\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ und $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $(x,y) = (y,x)\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $(\alpha x, y) = \alpha(x,y) = (x, \alpha y)\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
- $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$,
  $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)\,, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt analog

$$y^* x = (x,y) = \sum_{j=1}^{n} \overline{y}_j x_j \in \mathbb{C}$$

und damit

- $(x,x) \in \mathbb{R}\,, \quad (x,x) \geq 0\,, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$ und $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $(x,y) = \overline{(y,x)}\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$
- $(\alpha x, y) = \alpha(x,y) = (x, \overline{\alpha} y)\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$,
- $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$,
  $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)\,, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{C}^n$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch $A = A^\top$ und positiv definit, d. h.

$$(Ax, x) > 0\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\,, \quad x \neq 0.$$

Dann definiert die Abbildung

$$(\cdot,\cdot)_A \,:\, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

mit $(x,y)_A = (Ax,y)$ ebenfalls ein Skalarprodukt. Dabei benutzt man die Eigenschaft

$$(Ax,y) = (x, A^\top y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n\,, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

In $\mathbb{C}^n$ gilt analog mit einer hermiteschen ($A = A^*$), positiv definiten Matrix $A$, daß

$$(x,y)_A = (Ax,y)$$

eine weiteres Skalarprodukt ist.

Die Vektoren $x, y \in \mathbb{V}$, $x, y \neq 0$ heißen orthogonal, wenn $(x,y) = 0$ gilt. Ein Vektorsystem $v_1, \ldots, v_m$ ist orthogonal, falls ($v_j \neq 0\,,\ j = 1,\ldots,m$)

$$(v_i, v_j) = 0 \text{ für } i \neq j \text{ gilt.}$$

4) Die Norm $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung mit

- $\|x\| \geq 0\,, \quad \forall x \in \mathbb{V}$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\,,$ (Definitheit)
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|\,, \quad \forall x \in \mathbb{V}\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}\,,$ (absolute Homogenität)
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\,, \quad \forall x,y \in \mathbb{V}.$ (Subaditivität oder Dreiecksungl.)

Die wichtigsten Vektornormen sind die sog. $p$-Normen

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty\,.$$

Für $p \to \infty$ erhalten wir die Maximum-Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|\,.$$

Alle diese $p$-Normen sind äquivalent, d. h. $\exists\, C_1, C_2 > 0$ mit

$$C_1\|x\|_{p_1} \leq \|x\|_{p_2} \leq C_2\|x\|_{p_1}.$$

Die wichtigsten Normen sind für $p = 1$ (1-Norm), $p = 2$ (Euklidische Norm) und die Maximum-Norm. Es gilt

$$\|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq \left(n^{p-1}\right)^{1/p} \|x\|_p\,, \quad p \geq 1$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty\,,$$
$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \text{ für } q \geq p\,.$$

Es gilt $\|x\|_2 = \sqrt{(x,x)}$, d. h. die Euklidische Norm wird durch das Skalarprodukt induziert.

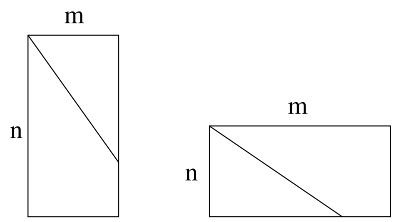
5) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n\,,\ x \neq 0$ gelte

$$Ax = \lambda x\ .$$

Dann heißt $\lambda$ Eigenwert (EW) und $x$ der zugehörige Eigenvektor (EV). Es gilt:

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms
$$\det\,(A-\lambda I)=0\,,$$
- Eine Matrix $A$ hat genau $n$ Eigenwerte, die evtl. vielfach sind,
- Die Eigenvektoren zu den verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig,
- Die Matrix $A$ ist diagonalisierbar, wenn eine Basis aus ihren Eigenvektoren existiert
$$Av_i=\lambda_i\,v_i\,,\quad i=1,\dots,n.$$
$V=\left(v_1\vdots v_2\vdots\dots\vdots v_n\right)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ist regulär und
$$A=V\Lambda V^{-1}\text{ mit }\Lambda=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\dots,\lambda_n\right).$$
- Nicht diagonalisierbare Matrizen heißen defektiv. Sie sind blockdiagonalisierbar
$$A=VJV^{-1}\text{ mit }J=\operatorname{BlockDiag}\left(J_1,\dots,J_m\right)\,,$$
wobei $m<n$ die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren ist. Die Jordan-Kästchen $J_k$ sind entweder Zahlen, $J_k\in\mathbb{R}^{1\times 1}$ oder haben die Form
$$J_k=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$
Das ist die kanonische Jordan-Form der Matrix $A$.
- Ist $A=A^\top$ symmetrisch, so sind alle Eigenwerte reell und die Eigenvektoren zueinander orthogonal.
- Alle Eigenwerte einer regulären Matrix sind von Null verschieden. Es gilt
$$\det A=\prod_{j=1}^{n}\lambda_j.$$

6) Sei $A\in\mathbb{C}^{n\times m}$ eine i. A. rechteckige Matrix. Die Singulärwertzerlegung (SVD) von $A$ ist
$$A=U\Sigma V^*\text{ mit }U\in\mathbb{C}^{n\times n},\quad\Sigma\in\mathbb{R}^{n\times m},\quad V\in\mathbb{C}^{m\times m}$$
wobei $U$ und $V$ unitär sind, d. h.
$$UU^*=U^*U=I\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad VV^*=V^*V=I\in\mathbb{R}^{m\times m}$$
und
$$\Sigma=\operatorname{diag}\left(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\min(m,n)}\right)\,.$$




Die SVD existiert für alle Matrizen $A$. Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ reell, so ist auch die SVD reellwertig und die Matrizen $U$ und $V$ sind orthogonal

$$UU^\top = U^\top U = I \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad VV^\top = V^\top V = I \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Wegen $AA^* = U\Sigma V^* \left(V\Sigma^\top U^*\right) = U\Sigma\Sigma^\top V^*$ sind die Matrizen $AA^*$ und $\Sigma\Sigma^\top$ ähnlich, d. h. die Quadrate der Singulärwerte $\sigma_i^2$ sind die Eigenwerte der hermiteschen Matrix $AA^*$.
Für $n = m$ gilt

$$|\det A| = \prod_{j=1}^{n} \sigma_j \,.$$

7) Die Matrix Norm ist definiert durch ($A \in \mathbb{R}^{n\times m}$)

$$\|A\|_M = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{V}_2}}{\|x\|_{\mathbb{V}_1}} = \sup_{x:\|x\|_{\mathbb{V}_1}=1} \|Ax\|_{\mathbb{V}_2} \,.$$

Es gilt $\|AB\|_M \leq \|A\|_M \cdot \|B\|_M$. Gilt $\|Ax\|_{\mathbb{V}_2} \leq \|A\|_M \, \|x\|_{\mathbb{V}_1}$, so heißen die Normen verträglich.
Beispiele sind:

- $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ - Spaltensummennorm, induziert durch $\|\cdot\|_1$ ,
- $\|A\|_2 = \max_{1\leq k\leq \min(m,n)} \sigma_k = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$
  - Spektralnorm, induziert durch $\|\cdot\|_2$,
- $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$ - Zeilensummennorm, induziert durch $\|\cdot\|_\infty$ ,
- $\|A\|_F = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ - Frobenius-Norm, ist mit $\|\cdot\|_2$ verträglich. Es gilt

$$\|A\|_F = \left(\sum_{k=1}^{\min(m,n)} \sigma_k^2\right)^{1/2} .$$

## 2.2 Analysis

Wir beginnen mit der Definition einiger grundlegender Begriffe. Sei $z_n \in \mathbb{R}$.

1) Eine Folge $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen ein $z \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z\,,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, N = N(\varepsilon)\ : \quad |z_n - z| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Eine Folge $\{z_n\}$ konvergiert gegen $z$ mit der Ordnung $\alpha > 0$, wenn eine von $n$ unabhängige Konstante $C$ existiert mit

$$|z_n - z| \leq C \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

2) Die O-Notation ist wie folgt definiert. Seien $\{y_n\}$ und $\{z_n\}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Wir schreiben

$$y_n = \mathrm{O}(z_n)\,,$$

falls

$$\exists\, C > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad |y_n| \leq C\, z_n\,, \quad \forall n \geq N\,.$$

Ebenso definieren wir

$$y_n = \mathrm{o}(z_n),$$

durch

$$\forall c > 0\,, \exists\, N \in \mathbb{N}\ : \quad y_n < c z_n \quad \forall n \geq N.$$

Analog gilt für Funktionen $f, g\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die O-Notation:

$$f = \mathrm{O}(g) \quad \text{für} \quad x \to a\ , \text{wenn}$$

$$\exists\, c > 0, \exists\, \varepsilon > 0\ : \quad |f(x)| \leq c\, g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\ : \quad |x - a| \leq \varepsilon.$$

bzw. für $x \to \infty$

$$\exists\, c > 0, \exists\, X \in \mathbb{R} : \quad |f(x)| \leq c\, g(x) \quad \forall x > X.$$

Die O-Notation ist keine Gleichheit, sondern eine rein symbolische Schreibweise. So gilt z. B. nicht die Transitivität, d. h. aus

$$f_1 = \mathrm{O}(g) \quad \text{und} \quad f_2 = \mathrm{O}(g)$$

folgt nicht $f_1 = f_2$ !
Oft wird $h \to 0$ anstatt $n \to \infty$ in der Numerik verwendet. So schreibt man für den Fehler $E_n$ des Euler-Verfahrens

$$E_n = \max_{0\leq k\leq n} |y_k - y(x_k)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{O}(h)\,, \quad h = \frac{X - x_0}{n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

3) Wir betrachten jetzt abstrakte (meist unendlich-dimensionale) Vektorräume $\mathbb{V}$ über $\mathbb{R}$. Ein lineares Funktional auf $\mathbb{V}$ ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)\,, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

Eine Bilinearform auf $\mathbb{V}$ ist eine Abbildung

$$a\,:\, \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)\,, \\ a(u, \alpha v + \beta w) &= \alpha a(u, v) + \beta a(u, w)\,, \end{aligned}$$
$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\, \forall\, u, v, w \in \mathbb{V}.$$

Die Bilinearform ist symmetrisch, falls

$$a(u, v) = a(v, u)\,, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}\,,$$

und positiv definit, falls

$$a(u, u) > 0\,, \quad \forall u \in \mathbb{V}\,,\, u \neq 0.$$

Ein Vektorraum $\mathbb{V}$ mit einem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge $\{v_n\}$ in $\mathbb{V}$ konvergiert, d. h. gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)\,:\quad \|v_n - v_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N,$$

dann $\exists v \in \mathbb{V}$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)\,:\quad \|v_n - v\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

oder kurz $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$. Hierbei wird die Norm in $\mathbb{V}$ durch das Skalarprodukt definiert:

$$\|v\| = (v, v)^{1/2}\,.$$

Einen solchen Raum nennt man Hilbert-Raum. Es gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|(u, v)| \leq \|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

Ist in $\mathbb{V}$ nur die Norm definiert und ist $\mathbb{V}$ vollständig, so handelt es sich um einen Banach-Raum.
Sei $\mathbb{V}$ ein Hilbert-Raum und $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann kann jedes $v \in \mathbb{V}$ eindeutig als

$$v = v_h + w\,, \quad v_h \in \mathbb{V}_h\,, \quad w \perp \mathbb{V}_h$$

mit

$$\|v - v_h\| = \min_{u_h \in \mathbb{V}_h} \|v - u_h\|$$

dargestellt werden.

Seien $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ zwei Hilbert-Räume und $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ ein linearer Operator. $\mathcal{A}$ heißt beschränkt, falls

$$\exists c > 0 \, : \, \|\mathcal{A}u\|_{\mathbb{W}} \le c\|u\|_{\mathbb{V}} \, , \quad \forall u \in \mathbb{V} \, .$$

Die Norm von $\mathcal{A}$ ist

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{u \in \mathbb{V}} \frac{\|\mathcal{A}u\|_{\mathbb{W}}}{\|u\|_{\mathbb{V}}} \, .$$

$\mathcal{A}$ ist dann stetig, denn aus $v_n \to v$ , d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ folgt

$$\|\mathcal{A}v_n - \mathcal{A}v\|_{\mathbb{W}} = \|\mathcal{A}(v_n - v)\|_{\mathbb{W}} \le \|\mathcal{A}\| \, \|v_n - v\|_{\mathbb{V}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \, .$$

Ist $\mathbb{W} = \mathbb{R}$, so ist ein beschränkter linearer Operator ein Funktional. Die Menge aller beschränkter linearer Funktionale $\mathbb{V}^*$ mit der Norm

$$\|\varphi\| = \sup_{u \in \mathbb{V}} \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|_{\mathbb{V}}} \, .$$

heißt dualer Raum.

Analog sei eine Bilinearform $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ beschränkt, falls

$$\exists \, c_2 > 0 \, : \, |a(u,v)| \le c_2 \|u\|_{\mathbb{V}} \, \|v\|_{\mathbb{V}} \, , \, \forall \, u, v \in \mathbb{V} \, .$$

Es gilt der Darstellungssatz von Riesz: Jedes beschränkte lineare Funktional $\varphi$ auf $\mathbb{V}$ kann eindeutig durch das Skalarprodukt dargestellt werden, d. h.

$$\forall \varphi \in \mathbb{V}^* \quad \exists! \, u_\varphi \in \mathbb{V} \, : \, \varphi(v) = (u_\varphi, v) \, , \quad \forall v \in \mathbb{V} \, .$$

Ist die Bilinearform $a$ symmetrisch und koerziv, d. h.

$$\exists c_1 > 0 \, : \, a(v,v) \ge c_1 \|v\|_{\mathbb{V}}^2 \, , \quad \forall v \in \mathbb{V} \, ,$$

so stellt $a(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt dar, daher ist die sog. Variationsformulierung:

$$\text{Finde } u \in \mathbb{V}, \text{ so dass } \quad a(u,v) = \varphi(v) \, , \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

eindeutig lösbar. Die Lösung erfüllt die a priori Energieabschätzung

$$c_1 \|u\|_{\mathbb{V}}^2 \le a(u,u) = \varphi(u) \le \|\varphi\| \, \|u\|_{\mathbb{V}}$$

und daher

$$\|u\|_{\mathbb{V}} \le c\|\varphi\| \, , \quad \text{wobei } c = 1/c_1 \, .$$

Die Energie-Norm

$$\|v\|_E = (a(v,v))^{1/2}$$

ist zu der Norm in $\mathbb{V}$ äquivalent

$$\sqrt{c_1}\|v\|_{\mathbb{V}} \le \|v\|_E \le \sqrt{c_2}\|v\|_{\mathbb{V}} \, , \quad \forall v \in \mathbb{V} \, .$$

Die Lösung der Variationsformulierung minimiert das Energiefunktional

$$E(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\,,\ \text{d. h. } E(u) \le E(v)\,, \quad \forall v \in \mathbb{V}\,.$$

Die Symmetrie von $a$ ist für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nicht wichtig. Ist $a$ beschränkt und koerziv, so ist die Lösung bereits eindeutig (Lax-Milgram-Theorem).

4) Ist $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V}_h = n \in \mathbb{N}$ ein endlichdimensionaler Unterraum, so ist die eindeutige Lösung von

$$\text{Finde } u_h \in \mathbb{V}_h,\ \text{so dass} \quad a(u_h, v_h) = \varphi(v_h) \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h$$

die sog. Galerkin-Näherung. Ist $a$ beschränkt und koerziv, so gilt

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{V}} \le \frac{c_2}{c_1} \min_{w_h \in \mathbb{V}_h} \|u - w_h\|_{\mathbb{V}}\,.$$

Der Beweis basiert auf der sog. Fundamentalorthogonalität

$$a(u - u_h, w_h) = 0\,, \quad \forall w_h \in \mathbb{V}_h\,.$$

Ist $a$ außerdem symmetrisch, so erhält man

$$\|u - u_h\|_E = \min_{w_h \in \mathbb{V}_h} \|u - w_h\|_E.$$

## 2.3 Funktionenräume

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, d. h. eine offene, nichtleere und zusammenhängende Teilmenge des Raumes $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

1) Für eine Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit $\mathbb{C}^k(\bar{\Omega})$, $k \ge 0$ den linearen Raum der stetigen und $k$-mal stetig differenzierbaren Funktionen $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mit beschränkten Ableitungen.
Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, d. h. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ ein Multiindex. Wir bezeichnen mit

$$\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

die partiellen Ableitungen von $v$ der Ordnung $|\alpha| \le k$. $\mathbb{C}^k(\bar{\Omega})$ ist ein normierter linearer Raum mit der Norm

$$\|v\|_{\mathbb{C}^k(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha v|$$

falls $\Omega$ ein beschränktes Gebiet ist. In diesem Fall ist $\bar{\Omega}$ kompakt, d. h. beschränkt und abgeschlossen.
Für $k = 0$ gilt $\mathbb{C}^0\left(\bar{\Omega}\right) = \mathbb{C}\left(\bar{\Omega}\right)$

$$\|v\|_{\mathbb{C}\left(\bar{\Omega}\right)} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)|\,.$$

Die Konvergenz in $\mathbb{C}\left(\bar{\Omega}\right)$ ist der gleichmäßigen Konvergenz äquivalent. Daher sind die Grenzfunktionen stetig und $\mathbb{C}\left(\bar{\Omega}\right)$ ist ein vollständiger normierter Raum, d. h. ein Banach-Raum. $\mathbb{C}\left(\bar{\Omega}\right)$ ist kein Hilbert-Raum, da die Maximumnorm nicht durch eine Skalarprodukt induziert wird. Als $\mathbb{C}^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum

$$\mathbb{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}^k(\Omega)$$

der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen und mit

$$\mathbb{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathbb{C}^\infty(\Omega)$$

den Raum der „glatten“ Funktionen mit kompaktem Träger

$$\operatorname{supp}(v) = \overline{\{x \in \Omega \,:\, v(x) \neq 0\}}\,,$$

d. h.

$$\mathbb{C}_0^\infty(\Omega) = \{v \in \mathbb{C}^\infty(\Omega) \,:\, \operatorname{supp}(v) \subset \Omega\,, \operatorname{supp}(v) \text{ - kompakt }\}\,.$$

**Beispiel 2.3.1.**
*Sei* $\Omega = (-2,2) \subset \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ *und*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \textit{für } x \leq 0\,, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad \textit{für } x > 0\,. \end{cases}$$

*Nach Analysis 1 ist* $\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$. *Die Funktion* $\varphi_0(x) = \varphi(1+x)\,\varphi(1-x)$ *erfüllt*

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1\,, \\ e^{-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1-x)^2}} > 0 & , \quad -1 < x < 1\,, \\ 0 & , \quad x \geq 1\,. \end{cases}$$

*Daher gilt* $\operatorname{supp}(\varphi_0) = [-1,1] \subset (-2,2)$ *und* $\operatorname{supp}(\varphi_0)$ *ist kompakt. Es gilt* $\varphi_0 \in \mathbb{C}_0^\infty((-2,2))$ .

2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $v \,:\, \Omega \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ eine Funktion. Unter

$$I[v] = \int_\Omega v(x)\,dx$$

verstehen wir das Lebesgue-Integral, das endlich oder unendlich sein kann und für $v \in \mathbb{C}(\bar{\Omega})$ mit dem Riemann-Integral übereinstimmt. Sei auch $\Omega$ Lebesgue-messbar mit $\operatorname{meas}(\Omega) > 0$.
Wir definieren nun die Räume $\mathbb{L}_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ als

$$\mathbb{L}_p(\Omega) = \left\{ v \,:\, \Omega \to \mathbb{R} \,:\, \|v\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |v(x)|^p\,dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

und

$$\mathbb{L}_\infty(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \|v\|_{\mathbb{L}_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)| < \infty \right\},$$

wobei

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)| = \inf_{\omega\,:\,\mathrm{meas}(\omega)=0} \ \sup_{x\in\Omega\setminus\omega} |v(x)|$$

ist. In $\mathbb{L}_p$-Räumen werden nicht einzelne Funktionen sondern Äquivalenzen der Funktionen betrachtet mit $u \sim v$, falls

$$\mathrm{meas}\,\{x \in \Omega : u(x) - v(x) \neq 0\} = 0$$

gilt. Damit gilt

$$\|v\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} = 0 \quad \Rightarrow \quad v \sim 0 \text{ und nicht } v = 0\,.$$

Die Räume $\mathbb{L}_p$ sind daher „semi-Banach-Räume“, wobei diese Tatsache sehr selten wichtig ist. Für $1 \le p \le \infty$ gilt die Hölder-Ungleichung

$$\|uv\|_{\mathbb{L}_1(\Omega)} \le \|u\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} \|v\|_{\mathbb{L}_q(\Omega)}, \quad \text{wobei} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

für alle $u \in \mathbb{L}_p(\Omega)$ und $v \in \mathbb{L}_q(\Omega)$. Die Dreiecksungleichung

$$\|u+v\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} \le \|u\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} + \|v\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)}\,, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{L}_p(\Omega)$$

heißt in $\mathbb{L}_p$-Räumen die Minkowski-Ungleichung.
Für $p = 2$ ist die Norm $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)}$ durch das Skalarprodukt

$$(u, v)_{\mathbb{L}_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega u(x)\, v(x)\, dx$$

induziert und $\mathbb{L}_2(\Omega)$ ist somit ein Hilbert-Raum. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt

$$(u, v)_{\mathbb{L}_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega u(x)\, \overline{v(x)}\, dx\,.$$

3) Formeln der partiellen Integration: Sei $u \in \mathbb{C}^1(\bar{\Omega})$, so gilt

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx = \int\limits_\Gamma u(x) n_i(x)\, ds_x, \quad i = 1, \ldots, d,$$

wobei $n(x) = (n_1(x), \ldots, n_d(x))^\top$ der äußere Normalenvektor von $\Omega$ ist. Insbesondere gilt für $u = vw$ mit $v, w \in \mathbb{C}^1(\bar{\Omega})$, dass

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, w(x)\, dx = \int\limits_\Gamma v(x) w(x) n_i(x)\, ds_x - \int\limits_\Omega v(x)\, \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\, dx, \quad i = 1, \ldots, d.$$

4) Für $\varphi \in \mathbb{C}_0^1(\Omega)$ und $v \in \mathbb{C}^1(\bar{\Omega})$ gilt die Formel der partiellen Integration

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} v(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega v(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x)\, dx\,, \quad i = 1, \ldots, d\,.$$

Für $v \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ existiert $\frac{\partial}{\partial x_i} v$ nicht notwendigerweise. Allerdings definiert

$$L(\varphi) = -\int_\Omega v(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x)\, dx$$

ein lineares Funktional $L : \mathbb{C}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. Ist $L$ beschränkt, folgt aus dem Darstellungssatz von Riest, dass eine eindeutige Funktion (Äquivalenzklasse!) $w \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ existiert mit

$$L(\varphi) = \int_\Omega w(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega v(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x)\, dx\,.$$

Das Funktional $L$ (oder die Funktion $w$) wird als verallgemeinerte oder schwache Ableitung von $v$ bezeichnet. Analog definieren wir für $\varphi \in \mathbb{C}_0^k(\Omega)$

$$(\partial^\alpha v, \varphi)_{L_2(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} (v, \partial^\alpha \varphi)_{L_2(\Omega)}\,, \quad |\alpha| \leq k\,.$$

Der Raum $\mathbb{H}^k(\Omega)$ ist der Raum aller Funktionen, deren schwache Ableitungen der Ordnung kleiner gleich $k \in \mathbb{N}_0$ zu $\mathbb{L}_2(\Omega)$ gehören. $\mathbb{H}^k(\Omega)$ ist ein sog. Sobolev-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \partial^\alpha u(x)\, \partial^\alpha v(x)\, dx$$

und der Normen

$$\|v\|_k = (v, v)_k^{1/2} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^2\, dx \right)^{1/2}\,.$$

Es gilt $\mathbb{H}^0(\Omega) = \mathbb{L}_2(\Omega)$ und $\|v\|_0 = \|v\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)} = \|v\|$. Außerdem gilt

$$\|v\|_1 = \left( \int_\Omega v^2(x)\, dx + \sum_{j=1}^d \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} = \left( \|v\|^2 + \|\mathrm{grad}\ v\|^2 \right)^{1/2}\,,$$

wobei $\mathrm{grad}\, v = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_d} \right)^T \in \mathbb{R}^d$ den Gradienten der Funktion $v$ bezeichnet. Weiterhin ist

$$\|v\|_2 = \left( \|v\|^2 + \|\mathrm{grad}\, v\|^2 + \|H(v)\|^2 \right)^{1/2}\,,$$

wobei

$$H(v) = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

die Hesse-Matrix bezeichnet. Die allgemeinen Sobolev-Räume werden mit $\mathbb{W}_p^k(\Omega)$ bezeichnet und haben die Norm

$$\|v\|_{\mathbb{W}_p^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty .$$

5) Der Raum $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ ist ein dichter Teilraum des $\mathbb{L}_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, wenn der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ hinreichend glatt ist, d. h. $\forall v \in \mathbb{L}_p(\Omega)$, $\exists \{v_n\} \subset \mathbb{C}(\bar{\Omega})$ mit $\|v - v_n\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} \to 0$ für $n \to \infty$. $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ ist nicht dicht in $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$, da eine unstetige Funktion niemals ein Grenzwert einer gleichmäßig konvergierenden Funktionenfolge sein kann. $\mathbb{C}^\ell(\bar{\Omega})$ ist für jedes $\ell \geq k$ dicht in $\mathbb{H}^k(\Omega)$.

6) Im Falle $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ ist $v$ für $x \in \Gamma$ wohldefiniert und wir bezeichnen die Spur von $v$ als $\gamma v : \Gamma \to \mathbb{R}$ mit

$$(\gamma v)(x) = v(x), \quad x \in \Gamma = \partial\Omega .$$

Für $\mathbb{L}_2(\Omega)$ ist die Spur von $v$ nicht wohldefiniert, da $\Gamma$ eine Nullmenge ist. Es gilt die sog. Sobolev-Ungleichung.

**Satz 2.3.2.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit glattem oder stückweise polynomialem Rand und $k > d/2$ . Dann gilt die Einbettung*

$$\mathbb{H}^k(\Omega) \subset \mathbb{C}(\bar{\Omega}) \quad \textit{und} \quad \|v\|_{\mathbb{C}(\bar{\Omega})} \leq c\,\|v\|_k , \quad c > 0 .$$

D. h. für $k > d/2$ besitzt jede Äquivalenzklasse (Funktion) $v$ einen stetigen Repräsentanten. Damit sind z. B. $\mathbb{H}^k(\Omega)$-Funktionen nicht unbedingt stetig für $d \geq 2$ .

**Beispiel 2.3.3.** *Für $d = 1$ gilt für $v \in \mathbb{H}^1((0,1))$*

$$v(x) = v(y) + \int_y^x v'(t)\, dt , \quad \forall x, y \in (0,1)$$

*und damit*

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq |v(y)| + \int_0^1 |v'(t)| \cdot 1 \, dt \\ &\leq |v(y)| + \left( \int_0^1 1^2 \, dt \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |v'(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \\ &= |v(y)| + \|v'\| . \end{aligned}$$

*Durch Quadrieren beider Seiten und integrieren über $y$ erhalten wir*

$$|v(x)|^2 \le \int_0^1 (|v(y)| + \|v'\|)^2 \, dy \le 2 \int_0^1 \left(|v(y)|^2 + \|v'\|^2\right) dy = 2\,\|v\|_1^2$$

*und damit*

$$\|v\|_{\mathbb{C}((0,1))} \le \sqrt{2}\,\|v\|_1 .$$

Analog gilt

$$\mathbb{H}^k(\Omega) \subset \mathbb{C}^\ell\left(\bar{\Omega}\right) \text{ für } k > \ell + d/2 \text{ mit } \|v\|_{\mathbb{C}^\ell(\Omega)} \le c\,\|v\|_k \,.$$

Damit ist die Spur einer $\mathbb{H}^1(\Omega)$-Funktion für $d \ge 2$ nichttrivial.

**Satz 2.3.4.** *Sei $\Omega$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^d$, $d \ge 2$ mit glattem oder stückweise polynomialem Rand $\Gamma = \partial\Omega$ . Dann kann der Spuroperator $\gamma : \mathbb{C}^1(\bar{\Omega}) \to \mathbb{C}(\Gamma)$ auf $\gamma : \mathbb{H}^1(\Omega) \to \mathbb{L}_2(\Gamma)$ fortgesetzt werden und es gilt*

$$\|\gamma\, v\|_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} \le c\,\|v\|_1 \quad \textit{mit} \quad \|\omega\|_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |\omega(x)|^2 \, ds_x\right)^{1/2}$$

$\big(\int_\Gamma$ *ist das Linien- oder Oberflächenintegral*$\big)$.

Der Spuroperator $\gamma$ ist damit ein beschränkter linearer Operator und sein Kern (Nullraum)

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \left\{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) : \quad \gamma v = 0\right\}$$

ist ein abgeschlossener Teilraum und folglich selbst ein Hilbert-Raum. In $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ gilt die sog. Poincaré-Ungleichung

$$\|v\| \le c\,\|\mathrm{grad}\, v\| \,, \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) .$$

**Beispiel 2.3.5.** *Betrachten wir das Randwertproblem*

$$\begin{cases} -u'' + \alpha\, u' + u = f \,, \quad x \in (0,1) = \Omega \,, \quad \alpha \in \mathbb{R} \,, \quad f \in \mathbb{L}_2(\Omega) \,, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \,. \end{cases}$$

*Sei $\mathbb{V} = \mathbb{H}^1(\Omega)$ und $v \in \mathbb{V}$. Es gilt*

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 (-u'' + \alpha u' + u)\, v \, dx \\ &= -u'v\Big|_0^1 + \int_0^1 (u'v' + \alpha u' v + uv)\, dx \\ &= \int_0^1 (u'v' + \alpha u' v + uv)\, dx = \int_0^1 f v \, dx = \varphi(v). \end{aligned}$$

*Hierbei ist $a(\cdot,\cdot)$ eine nichtsymmetrische Bilinearform auf $\mathbb{V}$ und $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Die Variationsformulierung lautet:*

$$\textit{Finde } u \in \mathbb{V} = \mathbb{H}^1(\Omega) \textit{ mit } \quad a(u,v) = \varphi(v)\,, \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

*Die Bilinearform ist stetig (beschränkt)*

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left| \int_0^1 (u'v' + uv)\; dx + \alpha \int_0^1 u'v\, dx \right| \\ &\le \left|(u,v)_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\right| + |\alpha|\; \|u'\|\; \|v\| \\ &\le \|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\; \|v\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + |\alpha|\; \|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\; \|v\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \\ &= (1 + |\alpha|)\; \|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\; \|v\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\;. \end{aligned}$$

*Es gilt auch*

$$\begin{aligned} |a(v,v)| &= \left| \int_0^1 \left( (v')^2 + \alpha v'v + v^2 \right)\; dx \right| \\ &= \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (v' + v)^2\;\; dx + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\; \|v\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \ge \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\; \|v\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

*und damit die Koerzivität von $a$ für $0 < \alpha < 2$. Das Funktional $\varphi$ ist ebenfalls stetig*

$$|\varphi(v)| = \left| \int_0^1 f v\, dx \right| \le \|f\|\, \|v\| \le c\, \|v\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\;.$$

*Das Lax-Milgram-Theorem garantiert damit die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems.*