Kapitel 3

Differentialgleichungen erster Ordnung

3.1 Lineare skalare Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{d} a_j(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x)u = f \tag{3.1}$$

erfüllt. Hierbei ist $a = a(x) = (a_1(x), \dots, a_d(x))^\top$, $a : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein glattes Vektorfeld mit $a(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in \Omega$, a_0 und f sind gegebene glatte Funktionen.

Definition 3.1.1. *Die Kurve*

$$\left\{ x = x(s) \in \mathbb{R}^d : \quad \frac{d}{ds}x(s) = a(x(s))\,, \quad s \in I \subseteq \mathbb{R} \right\}$$

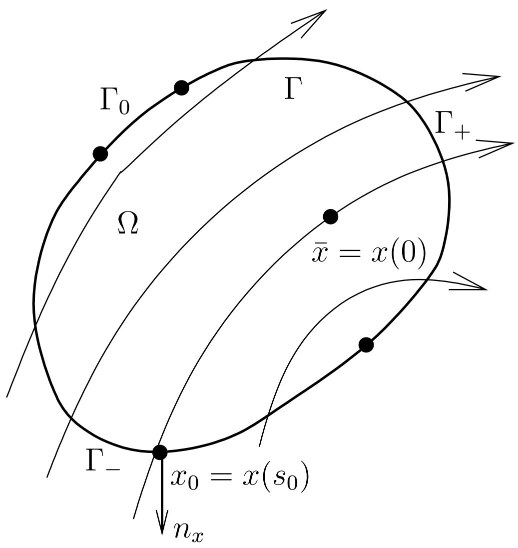
heißt charakteristische Kurve oder einfach Charakteristik.

Der Vektor $a(x)$ ist damit die Tangente an jedem Punkt der Kurve $x(s)$. Das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_j}{ds} = a_j(x)\,, \quad j = 1, \dots, d$$

ist für alle $\bar{x} \in \Omega$ mit $x(0) = \bar{x}$ eindeutig lösbar. Es sei $\Gamma = \partial\Omega$ der Rand von Ω. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\Gamma_- &= \{x \in \Gamma : \quad (n_x\,, (\gamma a)\,(x)) < 0\}\,,\\
\Gamma_+ &= \{x \in \Gamma : \quad (n_x\,, (\gamma a)\,(x)) > 0\}\,,\\
\Gamma_0 &= \{x \in \Gamma : \quad (n_x\,, (\gamma a)\,(x)) = 0\}\,,
\end{aligned}$$



wobei n_x die äußere Normale an Γ an der Stelle $x \in \Gamma$ ist und γa die Spur des Vektorfeldes a bezeichnet. Durch jeden Punkt x_0 von Γ_- gibt es eine eindeutige Charakteristik, die in Ω eintritt: $x\,(s;\,x_0)$. Γ_- ist damit der Eintrittsrand, Γ_+ der Austrittsrand und Γ_0 bezeichnet den charakteristischen Rand (parallel zur Charakteristik).
Sei $w(s) = u(x(s))$ eine Funktion des Parameters $s \in I \subset \mathbb{R}$. Es gilt (Kettenregel)

$$\frac{d}{ds}\,w(s) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{dx_j}{ds} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,a_j\,,$$

und damit die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}\,w + a_0\,(x(s))\;w = f\,(x(s)) \tag{3.2}$$

für die Funktion w. Zusammen mit der Charakteristik $x(s; x_0)$, wobei $x_0 \in \Gamma_-$, erhalten wir als Anfangsbedingung

$$w(s_0) = u\,(x\,(s_0\,;\,x_0)) = u(x_0)\,, \quad x_0 \in \Gamma_-\,.$$

Die Gleichung (3.1) muss daher mit der Randbedingung auf Γ_- vervollständigt werden:

$$u(x) = \varphi(x)\,, \quad x \in \Gamma_-\,.$$

Der Algorithmus zur Lösung von (3.1) in $\bar{x} \in \Omega$ ist

1) Löse das System
$$\frac{dx}{ds} = a(x(s))\,, \quad x(0) = \bar{x}\,;$$

2) Bestimme den Schnittpunkt x_0 der Kurve $x(s)$ mit Γ_- ; d. h. $x_0 = x(s_0)$;

3) Löse das Anfangswertproblem

$$\frac{dw}{ds} + a_0(x(s))w = f(x(s))\,,$$
$$w(s_0) = \varphi(x(s_0))\,;$$

4) Bestimme $u(\bar{x}) = w(0)$.

Beispiel 3.1.2. *„Transportgleichung“*

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 & \textit{in} \quad \Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = \varphi(x) & \textit{auf} \quad \Gamma = \Gamma_- = \{(0,x)\,,\ x \in \mathbb{R}\}\,. \end{cases}$$

Die Charakteristikgleichung lautet

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

und damit gilt

$$\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} s + c, \quad c \in \mathbb{R}^2.$$

Mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} t(0) \\ s(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$$

erhalten wir

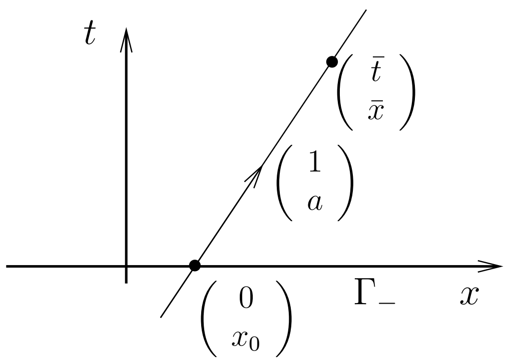
$$\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$$

und somit für den Schnittpunkt der Charakteristik mit Γ_-

$$s_0 = -\bar{t}.$$

Für den Schnittpunkt $(t_0, x_0)^\top = (t(s_0), x(s_0))^\top$ *gilt also*

$$t_0 = 0 \quad \textit{und} \quad x_0 = \bar{x} + as_0 = \bar{x} - a\bar{t}.$$



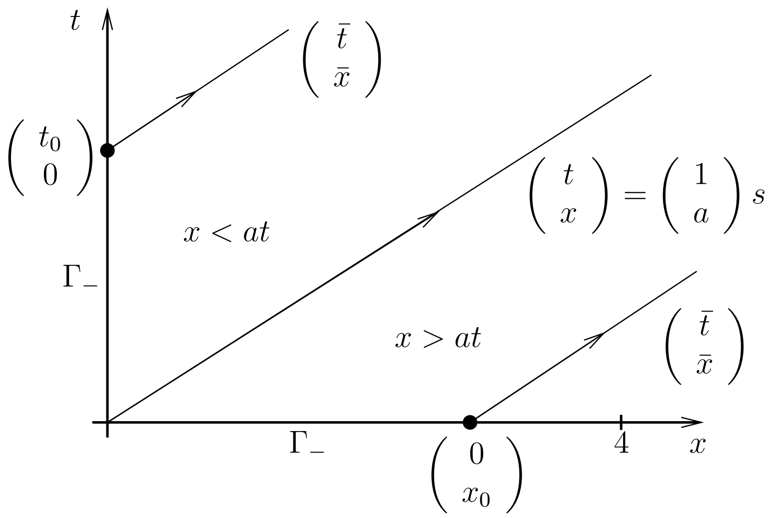
Die Differentialgleichung (3.2) lautet $\frac{dw}{ds} = 0$ *, d. h. w ist konstant entlang der Charakteristik und wir erhalten*

$$u\left(\bar{t},\, \bar{x}\right) = \varphi\left(\bar{x} - a\bar{t}\right),$$

den „Transport“ der Anfangsbedingung mit der Geschwindigkeit a.

Beispiel 3.1.3. *Sei $a > 0$, wir betrachten*

$$u_t + au_x + u = 1 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times (0,4)$$
$$u(0,x) = u(t,0) = 0$$



Die Charakteristiken sind wieder die Geraden

$$\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix}.$$

Für $\bar{x} \geq a\bar{t}$ gilt wieder $x_0 = \bar{x} - a\bar{t}$, $s_0 = -\bar{t}$. Die Differentialgleichung für w lautet

$$w' + w = 1$$

und damit

$$w(s) = 1 + ce^{-s}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit der Anfangsbedingung

$$0 = \varphi(x_0) = w(s_0) = w(-\bar{t}) = 1 + ce^{\bar{t}}$$

ergibt sich

$$c = -e^{-\bar{t}}$$

und damit

$$w(s) = 1 - e^{-\bar{t}-s}$$

und

$$u(\bar{t}, \bar{x}) = w(0) = 1 - e^{-\bar{t}}.$$

Für $\bar{x} < a\bar{t}$ gilt

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$s_0 = -\frac{\bar{x}}{a}\,, \quad t_0 = \bar{t} - \frac{\bar{x}}{a}\,.$$

Es folgt

$$0 = w\,(s_0) = 1 + ce^{+\bar{x}/a}\,, \quad c = -e^{-\bar{x}/a}$$

und damit

$$w(s) = 1 - e^{-\bar{x}/a - s}\,, \quad u\,(\bar{t}\,,\,\bar{x}) = w(0) = 1 - e^{-\bar{x}/a}\,.$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$u(t,x) = \begin{cases} 1 - e^{-t}\,, & x \geq at \\ 1 - e^{-x/a}, & x < at\,. \end{cases}$$

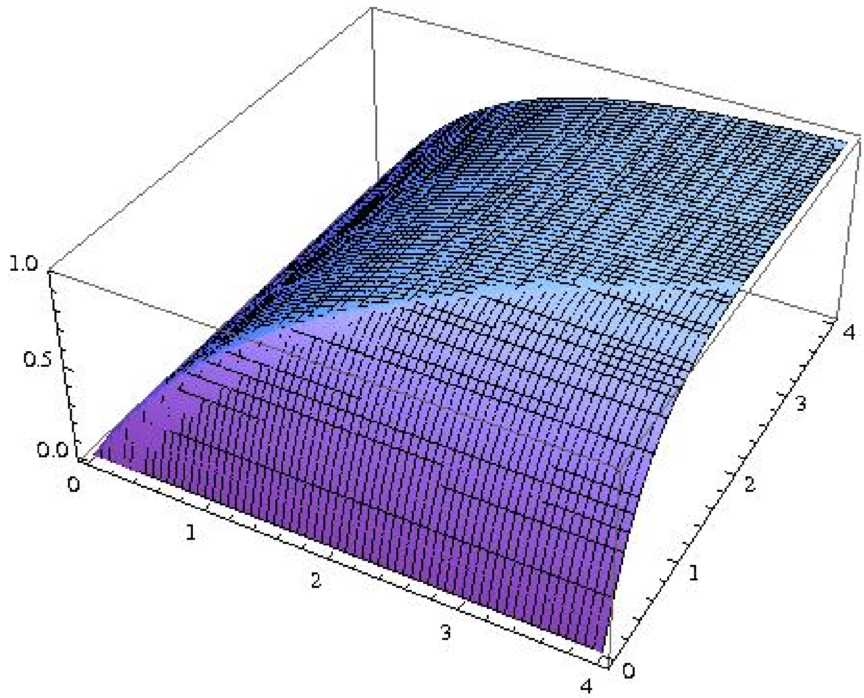


Abbildung 3.1: Die Funktion u für $x \in (0,4)\,, \quad t \in (0,4)$ und $a = 1/2$.

Beispiel 3.1.4.

$$u_t + (1+t)u_x = 0 \;\; in \; \mathbb{R}_+ \times (0,4)$$
$$u(0,x) = x^2\,, \quad u(t,0) = 0$$

Für die Charakteristik $(t(s), x(s))^\top$ *muss gelten*

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \end{pmatrix}$$

und damit

$$t(s) = s + c_1\,, \quad x'(s) = 1 + s + c_1\,, \quad x(s) = s + \frac{1}{2}s^2 + c_1 s + c_2\,.$$

Die Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} t(0) \\ x(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{s} \end{pmatrix}$$

führt auf $c_1 = \bar{t}\,, \quad \bar{x} = c_2$. *Die Charakteristik schneitet* Γ_- *auf dem positiven Teil der* x*-Achse falls*

$$t(s_0) = 0 \quad \textit{und} \quad x(s_0) \geq 0.$$

Dies gilt genau dann wenn

$$s_0 = -\bar{t} \quad \textit{und} \quad x(-\bar{t}) = -\bar{t} - \frac{1}{2}\bar{t}^2 + \bar{x} \geq 0.$$

Für $\bar{x} \geq \frac{1}{2}\bar{t}^2 + \bar{t}$ *beginnt die Charakteristik somit an der Stelle* $\left(0, \bar{x} - \frac{1}{2}\bar{t}^2 - \bar{t}\right)^\top$. *Da die Lösung entlang der Charakteristik in diesem Beispiel konstant ist, lautet sie*

$$u\left(\bar{t}, \bar{x}\right) = \left(\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{t}^2 - \bar{t}\right)^2 .$$

Für $\bar{x} < \frac{1}{2}\bar{t}^2 + \bar{t}$ *schneidet die Charakteristik den Rand* Γ_- *in einem Punkt* $(t_0, 0)^\top$ *und folglich ist die Lösung wegen der Randbedingung gleich Null. Damit gilt*

$$u(t,x) = \begin{cases} 0\,, & x < \frac{1}{2}t^2 + t, \\ \left(x - \frac{1}{2}t^2 - t\right)^2\,, & x \geq \frac{1}{2}t^2 + t. \end{cases}$$

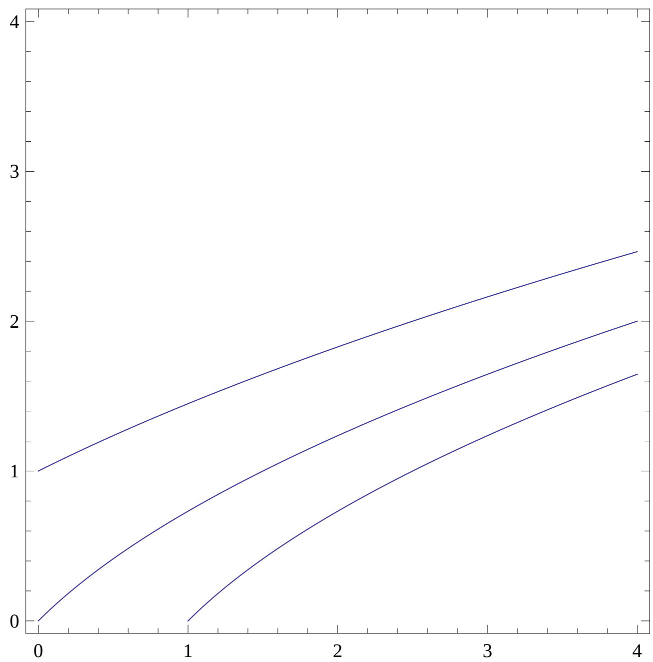


Abbildung 3.2: Charakteristiken für $c_1 = 0\,, c_2 = 0\,; \quad c_1 = 1\,, c_2 = 0$ und $c_1 = 0\,, c_2 = 1$

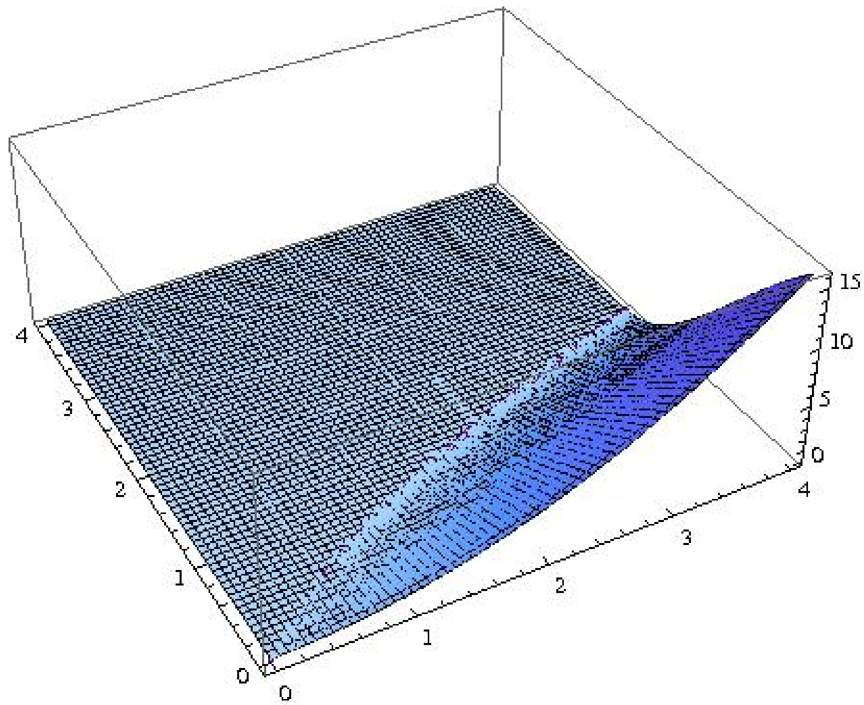


Abbildung 3.3: Die Funktion u für $t \in [0,4]$ und $x \in [0,4]$.

Bemerkung: Hat das Problem die spezielle Gestallt

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=0}^{d} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x) u = f, \quad \text{in } \Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d,$$

für die gesuchte Funktion $u(t,x)$, so wird oftmals auch die folgende Herangehensweise zur Bestimmung der Lösung im Punkt $(\bar{t}, \bar{x})^\top$ gewählt:

1) Berechne die Charakteristik $(t, x(t))^\top$ mit

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t)), \quad x(\bar{t}) = \bar{x}.$$

(Sie schneidet $\Gamma_- = \{(0,x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ für $t = 0$)

2) Substituere $w(t) = u(t, x(t))$, so dass

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=0}^{d} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

und löse

$$\frac{dw}{dt} + a_0(x(t))w = f, \quad w(0) = \varphi(x(0)).$$

3) Es gilt $u(\bar{t}, \bar{x}) = w(\bar{t})$.

3.2 Symmetrische hyperbolische Systeme

Wir betrachten zunächst das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)u = f(t,x)\,, \quad t > 0\,,\, x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

wobei

$$u, f\,:\, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad A, B\,:\, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Die Matrix A sei symmetrisch und besitzt damit reelle Eigenwerte

$$\lambda_j = \lambda_j\,(t,x)\,, \quad j = 1,\ldots,n\,.$$

Sind $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, so heißt das System streng hyperbolisch. Die Matrix

$$V = V(t,x) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad V^\top V = I$$

aus den Eigenvektoren von A ist orthogonal und

$$V^\top AV = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,, \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n\,.$$

Mit der Substitution $u = Vw$ ergibt sich

$$u_t = V_t\,w + V w_t\,, \quad u_x = V_x\,w + V w_x,$$
$$V^\top V_t\,w + w_t + V^\top AV_x\,w + \Lambda w_x + V^\top BV w = V^\top f,$$

und somit

$$w_t + \Lambda w_x + \tilde{B}w = \tilde{f},$$
$$w(0,x) = \tilde{\varphi}(x),$$

mit

$$\tilde{B} = V^\top\left(V_t + AV_x + BV\right)\,, \quad \tilde{f} = V^\top f \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}(x) = V^\top(0,x)\,\varphi(x).$$

Für $\tilde{B} = 0$ wird das System entkoppelt

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j\,(t,x)\,\frac{\partial w_j}{\partial x} = \tilde{f}_j\,(t,x)\,.$$

Zu jedem j existiert eine Charakteristik $x_j = x_j(t)$ durch $(\bar{t},\bar{x})$, die durch die Gleichung

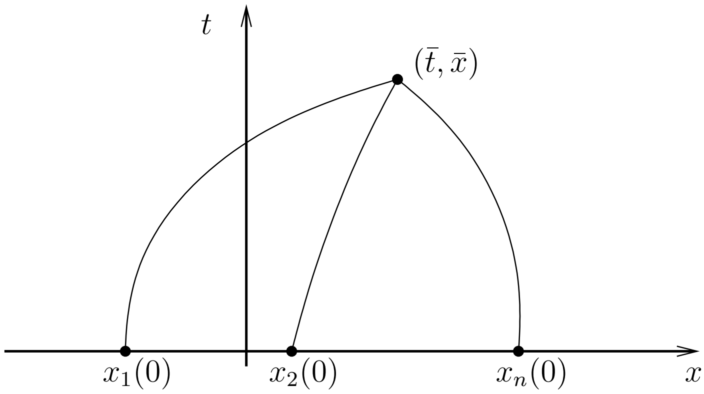
$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j(t,x)\,, \quad x_j\,(\bar{t}) = \bar{x}$$

bestimmt ist. Für $t = 0$ schneiden die Charakteristiken die x-Achse und es gilt $w_j\,(0,x_j(0)) = \tilde{\varphi}_j\,(x_j(0))$. Damit erhalten wir

$$w_j\,(\bar{t},\bar{x}) = \tilde{\varphi}_j\,(x_j(0)) + \int_0^{\bar{t}} \tilde{f}_j\,(s,x_j(s))\,ds\,.$$

Für die Lösung u ergibt sich wegen der Substitution

$$u = Vw.$$



Für $\tilde{B} \neq 0$ kann man ein iteratives Verfahren zur Lösung des Problems vorstellen

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= 0\,; \\ w_j^{(k+1)}(\bar{t}, \bar{x}) &= \tilde{\varphi}_j(x_j(0)) + \int_0^{\bar{t}} \left(\tilde{f} - \tilde{B}w^{(k)}\right)_j (s, x_j(s))\, ds\,, \quad k = 0, 1, \ldots\,. \end{aligned}$$

Beispiel 3.2.1. *„Wellengleichung“*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}\,,$$
$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Die Substitution $w_1 = \frac{\partial u}{\partial t}\,, \quad w_2 = \frac{\partial u}{\partial x}$ *führt auf*

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$w_1(0, x) = \psi(x), \quad w_2(0, x) = \frac{d\varphi}{dx}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

In der Matrix-Form lautet das System

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A\frac{\partial w}{\partial x} = 0\,, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ *und* $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Mit der Substitution* $w = Vz$ *erhalten wir zwei Transportgleichungen*

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial z_1}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial z_2}{\partial t} - \frac{\partial z_2}{\partial x} = 0 \quad \textit{mit} \quad \begin{pmatrix} z_1(0, x) \\ z_2(0, x) \end{pmatrix} = V^\top \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \varphi'(x) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}
z_1(t,x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi(x-t) - \varphi'(x-t)\right) , \\
z_2(t,x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi(x+t) + \varphi'(x+t)\right) , \\
w_1(t,x) &= \tfrac{1}{2}\left(\psi(x+t) + \psi(x-t) + \varphi'(x+t) - \varphi'(x-t)\right) = \tfrac{\partial u}{\partial t} , \\
w_2(t,x) &= \tfrac{1}{2}\left(\psi(x+t) - \psi(x-t) + \varphi'(x+t) + \varphi'(x-t)\right) = \tfrac{\partial u}{\partial x} .
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir die sog. Formel von d'Alambert als die Lösung der Wellengleichung

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(y)dy \,.$$

Die Verallgemeinerung des Systems auf d räumliche Dimensionen führt auf die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Bu = f\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$
$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dabei ist $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ eine n-vektorwertige Funktion, $A_j = A_j(t,x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und f, φ Vektoren mit n Komponenten. Das System wird als symmetrisches hyperbolisches System bezeichnet. Viele wichtige Gleichungen der mathematischen Physik können als symmetrische hyperbolische Systeme geschrieben werden. Im allgemeinen ist es für $d > 1$ nicht möglich, die Matrizen A_j gleichzeitig zu diagonalisieren und die Variablen damit zu entkoppeln.

Beispiel 3.2.2. *„Maxwell-Gleichungen"*
Die Entwicklung des elektrischen und magnetischen Feldes in $\mathbb{R}^3$ in einem homogenen, isotropen Raum kann wie folgt beschrieben werden:

$$E = E(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,$$
$$H = H(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} - \operatorname{curl} H + \frac{4\pi}{c} J = 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^3 \textit{ (Ampère-Gesetz)},$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{curl} E = 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^3 \textit{ (Faraday-Gesetz)},$$

wobei $c > 0$ eine Konstante ist und die Stromdichte J das Ohmsche Gesetz

$$J = \sigma E\,, \quad \sigma > 0 \textit{ , konstant,}$$

erfüllt. Der Differentialoperator curl *ist gegeben durch*

$$\operatorname{curl} H = \left(\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3}\,, \quad \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1}\,, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)^{\top} .$$

Zusammen mit den Anfangswerten

$$E(0,x) = E_0(x)\,, \quad H(0,x) = H_0(x)$$

stellen die Maxwellgleichungen ein gut gestelltes symmetrisches hyperbolisches System dar.

3.3 Differenzenverfahren

In diesem Abschnitt betrachten wir das einfache Anfangswertproblem für die Transportgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$
$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ist a konstant, bestimmt man die Lösung an der Stelle (t,x) durch die Zurückverfolgung der Charakteristik $x - at = const$ bis zur Stelle $t = 0$ und unter Verwendung des Wertes φ an dieser Stelle, d. h. für $\varphi \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ ist

$$u(t,x) = \varphi(x - at)\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

die eindeutige klassische Lösung.
Zur Diskreditisierung führen wir einen Zeitschritt $\tau > 0$ und eine Gitterschrittweite $h > 0$ ein. u_i^j bezeichnet die Approximation der Funktion u an der Stelle $(t_j\,,\,x_i)$ mit $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, \ldots$ und $x_i = ih$, $i \in \mathbb{Z}$. Die Gitterfunktion u_h ist dann wie folgt definiert

$$u_h = \left\{u_i^j\right\}_{i\in\mathbb{Z}\,,\,j\in\mathbb{N}_0}\,.$$

Ist $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, kann ihre Gitterfunktion als $u_i^j = u\left(t_j\,,\,x_i\right)$ definiert werden.
Ein Differentialoperator $\mathcal{L}$ kann durch einen Differezenoperator $\mathcal{L}_h$ approximiert werden. Es sei $u \in \mathbb{C}^m(\mathbb{R})$, $m \geq 2$ und $\mathcal{L}u = u'$. Für eine Gitterfunktion u_h definieren wir

$$\left(\mathcal{L}_h^- u_h\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\,, \quad \left(\mathcal{L}_h^+ u_h\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

und

$$\left(\mathcal{L}_h^\sigma u_h\right)_i = \sigma\left(\mathcal{L}_h^+ u_h\right)_i + (1-\sigma)\left(\mathcal{L}_h^- u_h\right)_i = \frac{\sigma u_{i+1} + (1-2\sigma)\,u_i - (1-\sigma)\,u_{i-1}}{h}\,.$$

Ein Differenzoperator $\mathcal{L}_h$ approximiert $\mathcal{L}$ mit der Ordnung p falls

$$\max_i \left|\left(\mathcal{L}_h u_h\right)_i - \left(\mathcal{L}u\right)(x_i)\right| = \mathrm{O}\left(h^p\right)\,, \quad h \to 0\,.$$

Aus der Taylor-Formel folgt

$$u_{i\pm1} = u_i \pm hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$
$$\left(\mathcal{L}_h^\pm u_h\right)_i - u'(x_i) = \pm\frac{h}{2}u''(x_i) + \mathrm{O}\left(h^2\right) = \mathrm{O}(h)$$

für $u \in \mathbb{C}^m(\mathbb{R})$, $m \geq 2$. Damit sind die Operatoren $\mathcal{L}_h^{\pm}$ von der ersten Approximationsordnung. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_h^{\sigma} u_h)_i &= \frac{1}{h}\Bigg(\sigma\left(u_i + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \mathrm{O}\left(h^3\right)\right) + (1-2\sigma)u_i \\
&\quad -(1-\sigma)\left(u_i - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \mathrm{O}\left(h^3\right)\right)\Bigg) \\
&= \frac{1}{h}\Bigg(\underbrace{(\sigma + (1-2\sigma) - (1-\sigma))}_{=0} u_i + \underbrace{(\sigma + (1-\sigma))}_{=1} hu'(x_i) \\
&\quad + (\sigma - (1-\sigma))\frac{h^2}{2}u''(x_i) + \mathrm{O}\left(h^3\right)\Bigg) \\
&= u'(x_i) + (2\sigma - 1)\frac{h}{2}u''(x_i) + \mathrm{O}\left(h^2\right) .
\end{aligned}$$

Daher ist die „zentrale“ Differenz

$$\left(\mathcal{L}_h^{1/2} u_h\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

von der 2. Approximationsordnung. Wir benutzen die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
u_{\bar{x},i} &= \left(\mathcal{L}_h^{-} h\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad \text{für die Rückwärts-,} \\
u_{x,i} &= \left(\mathcal{L}_h^{+} h\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad \text{für die Vorwärts-}
\end{aligned}$$

und

$$u_{\mathring{x},i} = \frac{1}{2}\left(u_{\bar{x},i} + u_{x,i}\right) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad \text{für die zentrale}$$

Differenz.

Sei jetzt $a < 0$. Wir betrachten

$$(\mathcal{L}_{\tau h} u_h)_i^j = (u_t + a u_x)_i^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + a\frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} = 0 , \quad j = 0, 1, \ldots, \quad i \in \mathbb{Z}$$

als Approximation der Gleichung $u_t + a u_x = 0$ mit der Anfangsbedingung $u_i^0 = \varphi(x_i)$, $i \in \mathbb{Z}$. Aus der Differenzengleichung ergibt sich

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{\tau}{h}a\left(u_{i+1}^j - u_i^j\right) = \left(1 + \frac{\tau}{h}a\right)u_i^j + \left(-\frac{\tau}{h}a\right)u_{i+1}^j , \quad j = 0, 1, \ldots, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

als eine explizite Möglichkeit, die Näherungen für den nächsten Zeitschritt aus dem vorhergehenden zu berechnen. Für

$$0 \leq 1 + \frac{\tau}{h}a \leq 1 \text{ , d. h. } \tau \leq \frac{h}{-a}$$

ist dies eine Konvexkombination und es gilt

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}}\left|u_i^{j+1}\right| \leq \left(1 + \frac{\tau}{h}a\right)\sup_{i\in\mathbb{Z}}\left|u_i^j\right| + \left(-\frac{\tau}{h}a\right)\sup_{i\in\mathbb{Z}}\left|u_{i+1}^j\right| = \sup_{i\in\mathbb{Z}}\left|u_i^j\right| .$$

Damit ist das Verfahren stabil in der Maximumsnorm:

$$\left\|u^{j+1}\right\|_{\mathbb{C}} = \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left|u_i^{j+1}\right| \le \left\|u^j\right\|_{\mathbb{C}} \le \ldots \le \left\|u^0\right\|_{\mathbb{C}} = \|\varphi\|_{\mathbb{C}} .$$

Für $a > 0$ ist dagegen das Schema

$$(\mathcal{L}_{\tau h}\, u_h)_i^j = (u_t + a u_{\bar{x}})_i^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + a\frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} = 0$$

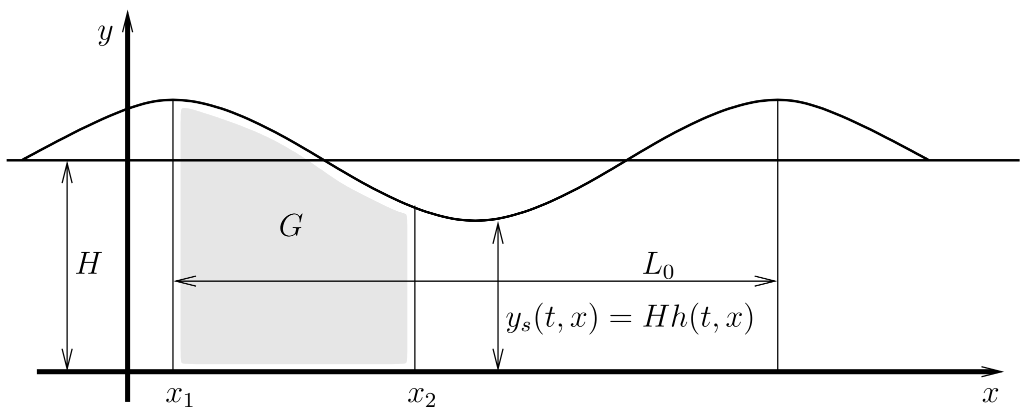
stabil. Damit werden immer die Punkte in der Richtung des Flusses verwendet. Das Verfahren nennt man daher Upwind-Verfahren. Die Stabilitätsbedingungen lauten

$$\tau \le \frac{h}{-a}\,,\ a < 0 \quad \text{oder} \quad \tau \le \frac{h}{a}\,,\ a > 0\,.$$

3.4 Flachwassergleichungen

Die Flachwassergleichungen sind ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit t und in zwei Raumdimensionen x und y. Die physikalischen Größen sind dabei:

1. Geometrische Größen:



- H $[m]$ - Wassertiefe (ungestört);
- $y_s(x)$ $[m]$ - Wassertiefe an der Stelle x;
- $h(x) = y_s(x)/H$ $[1]$ - Faktor der Höhenabweichung;
- L_0 $[m]$ - charakteristische Wellenlänge;

2. Physikalische Größen

- ρ $[kg/m^3]$ - die Dichte des Wassers;
- p $[N/m^2]$ - der Druck;

- g $[m/s^2]$ - die Erdbeschleunigung;
- u $[m/s]$ - horizontale Geschwindigkeitskomponente;

Die folgenden Annahmen werden getroffen:

- Die vertikale Bewegung wird gemittelt:

$$\int_0^{y_s(t,x)} U(t,x,y)dy = u(t,x)y_s(t,x)$$

- Hydrostatisches Gleichgewicht in y-Richtung wird vorausgesetzt

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g = const\,.$$

- Oberflächenspannung und Viskosität werden vernachlässigt;
- Die Dichte ρ wird konstant angenommen;
- Es gilt $H/L_0 << 1$, d. h. „flach“.

Hydrostatisches Gleichgewicht

Wir integrieren die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$$

von der freien Oberfläche $y_s\,(t,x)$, wo $p = 0$ gilt bis y und erhalten

$$p(t,x,y) = \int_{y_s}^{y} \frac{\partial p}{\partial y} dy = -\rho g \int_{y_s}^{y} dy = -\rho g\,(y - y_s) = \rho g\,(Hh(t,x) - y)\,,$$

also

$$p(t,x,y) = \rho g\,(Hh(t,x) - y)\,.$$

Massenerhaltung

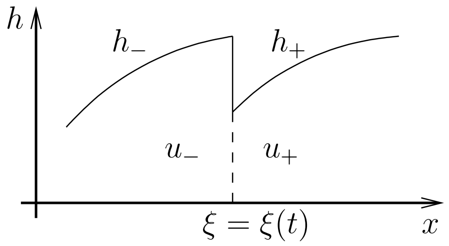
Seien x_1 und $x_2 > x_1$ zwei Positionen. Das Gebiet G sei beschränkt durch den Boden, die freie Oberfläche und zwei vertikale Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$. Außerdem sei es von der Tiefe 1 [m] in die z-Richtung. Die Änderung der Masse in G ist nur durch den (zu oder aus) Fluss durch die Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ zu erwarten:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho y_s(t,x)dx = \rho u\,(t,x_1)\,y_s\,(t,x_1) - \rho u\,(t,x_2)\,y_s\,(t,x_2)$$

oder

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2} h(t,x)dx = u\left(t,x_1\right)h\left(t,x_1\right) - u\left(t,x_2\right)h\left(t,x_2\right)\ .$$

Diese Gleichung gilt auch für evtl. unstetige Funktionen u und h, wobei die Unstetigkeit (Flutwelle) sich bewegen wird $\xi = \xi(t)$.



Impulserhaltung

Das Newton'sche Gesetz lautet: Die zeitliche Änderung des gesamten Impulses in G erfolgt durch den Impulsfluss durch die Ränder plus die Kräfte, die an den Rändern angelegt sind. An der freien Oberfläche gibt es keinen Druck. Der Druck am Boden wirkt vertikal und kann keine horizontalen Kräfte verursachen. Daher gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2}\rho u(t,x)y_s(t,x)dx &= \rho u^2(t,x_1)y_s(t,x_1) - \rho u^2(t,x_2)y_s(t,x_2)\\ &\quad + \int\limits_0^{y_s(t,x_1)} p\left(t,x_1,y\right)dy - \int\limits_0^{y_s(t,x_2)} p\left(t,x_2,y\right)dy\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2} u(t,x)h(t,x)dx &= u^2(t,x_1)h(t,x_1) - u^2(t,x_2)h(t,x_2)\\ &\quad + \frac{1}{\rho H}\left(\int\limits_0^{y_s(t,x_1)} p\left(t,x_1,y\right)dy - \int\limits_0^{y_s(t,x_2)} p\left(t,x_2,y\right)dy\right)\ .\end{aligned}$$

Skalierung der Gleichungen

Wir führen dimensionslose und skalierte Variablen und Funktionen ein

$$\tilde{x} = \frac{x}{L_0}\,,\quad \tilde{y} = \frac{y}{H}\,,\quad \tilde{t} = \frac{t}{T_0}\,,\quad T_0 = \frac{L_0}{\sqrt{gH}}\,;$$

$$\tilde{u}\left(\tilde{t},\tilde{x}\right) = \frac{u\left(T_0\tilde{t},\, L_0\tilde{x}\right)}{\sqrt{gH}}\,,\quad \tilde{p}\left(\tilde{t},\,\tilde{x},\,\tilde{y}\right) = \frac{p\left(T_0\tilde{t},\, L_0\tilde{x},\, H\tilde{y}\right)}{\rho g H}\,,\quad \tilde{h}(\tilde{t},\tilde{x}) = h(T_0\tilde{t}, L_0\tilde{x})$$

und erhalten mit $\frac{d}{dt} = \frac{1}{T_0}\frac{d}{d\tilde{t}}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}\left(\tilde{t},\, \tilde{x},\, \tilde{y}\right) &= \tilde{h}\left(\tilde{t},\, \tilde{x}\right) - \tilde{y}\,; \\
\frac{d}{d\tilde{t}}\int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{h}\left(\tilde{t},\tilde{x}\right) d\tilde{x} &= \tilde{u}\left(\tilde{t},\, \tilde{x}_1\right)\tilde{h}\left(\tilde{t},\tilde{x}_1\right) - \tilde{u}\left(\tilde{t},\tilde{x}_2\right)\tilde{h}\left(\tilde{t},\tilde{x}_2\right) \\
\frac{d}{d\tilde{t}}\int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{u}\left(\tilde{t},\tilde{x}\right)\tilde{h}\left(\tilde{t},\tilde{x}\right) d\tilde{x} &= \tilde{u}^2\left(\tilde{t},\tilde{x}_1\right)\tilde{h}\left(\tilde{t},\tilde{x}_1\right) - \tilde{u}^2\left(\tilde{t},\tilde{x}_2\right)\tilde{h}\left(\tilde{t},\tilde{x}_2\right) \\
&\quad + \int_0^{\tilde{h}_1} \tilde{p}\left(\tilde{t},\, \tilde{x}_1,\, \tilde{y}\right) d\tilde{y} - \int_0^{\tilde{h}_2} \tilde{p}\left(\tilde{t},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{y}\right) d\tilde{y}.
\end{aligned}
$$

Im folgenden verzichten wir auf die Tilden für eine leserlichere Notation. Wegen $\int p\, dy = hy - \frac{1}{2}y^2$, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
p &= h - y\,; \\
\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} h\, dx &= -uh\Big|_{x_1}^{x_2}\,; \\
\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} uh\, dx &= -\left(u^2h + \frac{1}{2}h^2\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}.
\end{aligned}
$$

Sind die Funktionen u, h glatt ($\mathbb{C}^1$), erhalten wir für $x_1 \to x_2$ das System der Flachwassergleichungen

$$
\begin{cases} h_t + (uh)_x = 0\,, \\ (uh)_t + \left(u^2h + \frac{1}{2}h^2\right)_x = 0\,, \end{cases}
$$

oder in der konservativen Form mit $z = \binom{h}{uh} = \binom{z_1}{z_2}$

$$
z_t + (\phi(z))_x = 0\,, \quad \phi(z) = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_2^2/z_1 + \frac{1}{2}z_1^2 \end{pmatrix}
$$

oder durch Anwendung der Produktregel und Ausnutzen der ersten Gleichung

$$
\begin{cases} h_t + (uh)_x = 0 \\ u_t + h_x + uu_x = 0\,. \end{cases}
$$

Das System ist quasi-linear und hyperbolisch.

3.5 Hyperbolische Systeme von Erhaltungsgleichungen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und

$$f_j : \Omega \to \mathbb{R}^n , \quad j = 1, \ldots, d$$

d glatte vektorwertige Funktionen. Weiterhin sei

$$u = (u_1, \ldots, u_n)^\top : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \Omega$$

die unbekannte vektorwertige Funktion mit

$$u_j = u_j(t, x) = u_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_d) , \quad t > 0 , \quad x \in \mathbb{R}^d .$$

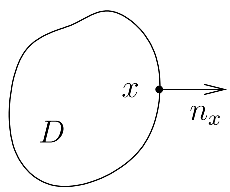
Die allgemeine Form eines Systems von Erhaltungsgleichungen lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f_j(u)}{\partial x_j} = 0 , \quad x \in \mathbb{R}^d , \quad t > 0 . \tag{3.3}$$

Das Gebiet Ω nennt man Zustandsraum und die Vektoren

$$f_j = (f_{1j}, f_{2j}, \ldots, f_{nj})^\top , \quad j = 1, \ldots, d$$

Flussfunktionen. Formal beschreibt das System (3.3) die „Erhaltung“ von n Größen $u_1, \ldots, u_n$. Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ein beliebiges Gebiet in dem physikalischen Raum $\mathbb{R}^d$ mit dem Rand $\Gamma = \partial D$ und mit dem äußeren Normalenvektor $n_x \in \mathbb{R}^d$, $|n_x| = 1$ an der Stelle $x \in \Gamma$. Die Integration des Systems (3.3) über D



und die Anwendung des Satzes von Gauß führt auf

$$\frac{d}{dt} \int_D u(t, x) dx + \int_\Gamma \sum_{j=1}^{d} f_j(u) \left(n_x\right)_j ds_x = 0$$

oder mit $F = (f_1, \ldots, f_d) \in \mathbb{R}^{n \times d}$

$$\frac{d}{dt} \int_D u(t, x) dx + \int_\Gamma F(u) n_x ds_x = 0 .$$

Man interpretiert diese Gleichung wie folgt: Eine zeitliche Veränderung der Größe

$$\int_D u(t,x)dx$$

erfolgt ausschließlich durch die Ab- bzw. Zuflüsse durch den Rand Γ. Die Quadratischen Matrizen A_j (sog. Jacobi-Matrizen) der Vektoren f_j definieren wir durch

$$A_j(u) = \left(\frac{\partial f_{kj}(u)}{\partial u_\ell}\right)_{k,\ell=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

für $j = 1, \ldots, d$. Das System (3.3) nennt man hyperbolisch, falls die Matrix $A(u,\omega) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A(u,\omega) = \sum_{j=1}^d \omega_j\, A_j(u)\,, \quad \omega \in \mathbb{R}^d\,, \quad \omega \neq 0\,, \quad u \in \Omega$$

n reelle Eigenwerte

$$\lambda_1(u,\omega) \leq \lambda_2(u,\omega) \leq \cdots \leq \lambda_n(u,\omega)$$

mit n linear unabhängigen Eigenvektoren

$$r_k(u,\omega) \in \mathbb{R}^n\,, \quad A(u,\omega)r_k(u,\omega) = \lambda_k(u,\omega)r_k(u,\omega)$$

besitzt. Sind alle EW verschieden, so heißt das System strikt hyperbolisch.

Beispiel 3.5.1. *„Flachwassergleichungen"*
Das System lautet

$$\begin{cases} h_t + (uh)_x = 0 \\ (uh)_t + \left(u^2 h + \frac{1}{2}h^2\right)_x = 0 \end{cases} \qquad \textit{mit } h > 0\,,\ u \in \mathbb{R}.$$

Mit

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ uh \end{pmatrix}, \quad z_1 > 0\,, \quad z_2 \in \mathbb{R}\,,\ \textit{d. h. } \Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

erhalten wir die Form mit $d = 1$, $n = 2$

$$z_t + (f(z))_x = 0\,, \quad f(z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_2^2/z_1 + \frac{1}{2}z_1^2 \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$A(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{z_2^2}{z_1^2} + z_1 & 2\frac{z_2}{z_1} \end{pmatrix}.$$

Für $d = 1$ ist die Diagonalisierbarkeit der Matrix

$$A(z,\omega) = \omega A(z)\,, \quad \omega \neq 0$$

mit der von der Jacobi-Matrix $A(z)$ äquivalent. Es ergibt sich

$$\det\left(A(z) - \lambda I\right) = -\lambda\left(2\frac{z_2}{z_1} - \lambda\right) + \frac{z_2^2}{z_1^2} - z_1 = \lambda^2 - 2\frac{z_2}{z_1}\lambda + \frac{z_2^2}{z_1^2} - z_1 = 0\,,$$
$$\lambda_{1,2}(z) = \frac{z_2}{z_1} \pm \sqrt{z_1} = u \pm \sqrt{h}\,.$$

Da $z_1 > 0$ gilt, ist das System strikt hyperbolisch. Die Eigenvektoren

$$r_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{z_2}{z_1} - \sqrt{z_1} \end{pmatrix}\,, \quad r_2(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{z_2}{z_1} + \sqrt{z_1} \end{pmatrix}$$

sind offenbar linear unabhängig, da die EW verschieden sind.

Beispiel 3.5.2. *„Die Bürgers-Gleichung“*
Die Gleichung lautet

$$u_t + uu_x = 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

und kann sofort in der “konservativen“ Form

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0$$

geschrieben werden. Hier gilt $d = 1$ und $n = 1$ mit $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. Die Gleichung ist ebenfalls strikt hyperbolisch.

Beispiel 3.5.3. *„Das p-System“*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(p(v)\right) = 0\,. \end{cases}$$

Das System beschreibt eine eindimensionale, isentropische (d. h. die Entropie bleibt konstant) Gasströmung in Lagrange-Koordinaten. Dabei ist u die Geschwindigkeit, $v > 0$ das spezifische Volumen und der Druck $p = p(v)$ wird als

$$p(v) = Av^{-\gamma}\,, \qquad A > 0\,, \quad \gamma \geq 1$$

modelliert. Es gilt $d = 1$, $n = 2$ und

$$z = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}\,, \quad f(z) = \begin{pmatrix} -u \\ p(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_2 \\ p\left(z_1\right) \end{pmatrix}\,.$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'\left(z_1\right) & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Damit gilt

$$\lambda_1(z) = -\sqrt{-p'\left(z_1\right)} < \lambda_2(z) = \sqrt{-p'\left(z_1\right)}$$

und das p-System ist strikt hyperbolisch.

Beispiel 3.5.4. *„Euler-Gleichungen der Gasdynamik“*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad \textit{(Massenerhaltung)},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p\delta_{ij}) = 0 \quad \textit{(Impulserhaltung)},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} ((\rho e + p) u_j) = 0 \quad \textit{(Energieerhaltung)},$$

wobei ρ *die Dichte des Gases,* $u = (u_1,\, u_2,\, u_3)^\top$ *die Geschwindigkeit,* p *den Druck und*

$$e = e_i + \frac{1}{2} |u|^2$$

die spezifische totale Energie bezeichnen. Dabei ist e_i *die spezifische innere Energie. Damit haben wir 5 Gleichungen für 6 Funktionen* ρ, u, p, e_i. *Man benötigt noch eine sog. Zustandsgleichung, die oft in der Form (algebraisch)*

$$p = p\,(\rho,\, e_i)$$

modelliert wird. Für ein ideales Gas wird

$$p = (\gamma - 1)\rho e_i, \quad \gamma > 1$$

als Zustandsgleichung angenommen. Man kann das System in der Form (3.3)

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_j(z)}{\partial x_j} = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^3\,, \quad t > 0$$

schreiben, wobei

$$\begin{aligned}
z &= (z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4,\, z_5)^\top = (\rho,\, \rho u_1,\, \rho u_2,\, \rho u_3,\, \rho e)^\top\,, \\
f_1(z) &= \big(\rho u_1,\, \rho u_1^2 + p,\, \rho u_1 u_2,\, \rho u_1 u_3,\, (\rho e + p) u_1\big) \\
&= \big(z_2,\, z_2^2/z_1 + p(z),\, z_2 z_3/z_1,\, z_2 z_4/z_1,\, (z_5 + p(z))\, z_2/z_1\big)\,, \\
f_2(z) &= \big(\rho u_2,\, \rho u_1 u_2,\, \rho u_2^2 + p,\, \rho u_3 u_2,\, (\rho e + p) u_2\big) \\
&= \big(z_3,\, z_2 z_3/z_1,\, z_3^2/z_1 + p(z),\, z_4 z_3/z_1,\, (z_5 + p(z))\, z_3/z_1\big)\,, \\
f_3(z) &= \big(\rho u_3,\, \rho u_1 u_3,\, \rho u_2 u_3,\, \rho u_3^2 + p,\, (\rho e + p) u_3\big) \\
&= \big(z_4,\, z_2 z_4/z_1,\, z_3 z_4/z_1,\, z_4^2/z_1 + p(z),\, (z_5 + p(z))\, z_4/z_1\big)
\end{aligned}$$

mit

$$p(z) = p\left(z_1,\, \frac{z_5}{z_1} - \frac{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}{2z_1^2}\right).$$

Es gilt $z_1 > 0,\ z_5 > 0, \quad (z_2,\ z_3,\ z_4) \in \mathbb{R}^3$ *und* $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. *Das System der Euler-Gleichungen stellt in* $\mathbb{R}^3$ *ein sehr schweres Problem dar, das sowohl theoretisch als auch numerisch viele Schwierigkeiten bereitet. Es werden zahlreiche Vereinfachungen als Modelle betrachtet, wie z. B. das* ρ*-System.*
Unter der Annahme

$$\frac{\partial p}{\partial z_1} = \frac{\partial p}{\partial \rho} > 0 \quad \text{für } \rho > 0$$

ist das System der Euler-Gleichungen in $1D$ *hyperbolisch.*

3.6 Charakteristiken von quasi-linearen Gleichungen

Um die Schwierigkeiten, die bei den hyperbolischen Systemen auftreten, besser zu verstehen, betrachten wir zunächst eine skalare Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(f(u)\right) = 0, \quad \text{d. h. } d = 1,\, n = 1$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{(nichtkonservative Form).}$$

Wenn $\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix}$ eine Charakteristik ist, d. h. die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'\left(u\left(t(s),\, x(s)\right)\right) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t(0) \\ x(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$$

mit einer glatten Lösung u erfüllt sind, dann ist u entlang der Charakteristik konstant, denn

$$\frac{d}{ds}u\left(t(s),\, x(s)\right) = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,.$$

Daher gilt $u(t(s),\, x(s)) = \bar{u} = const$ und die Charakteristiken selbst sind Geraden

$$\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(\bar{u}) \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix}.$$

Diese Geraden schneiden die x-Achse für $s = -\bar{t}$, d. h. $t\left(-\bar{t}\right) = 0$ und damit bei

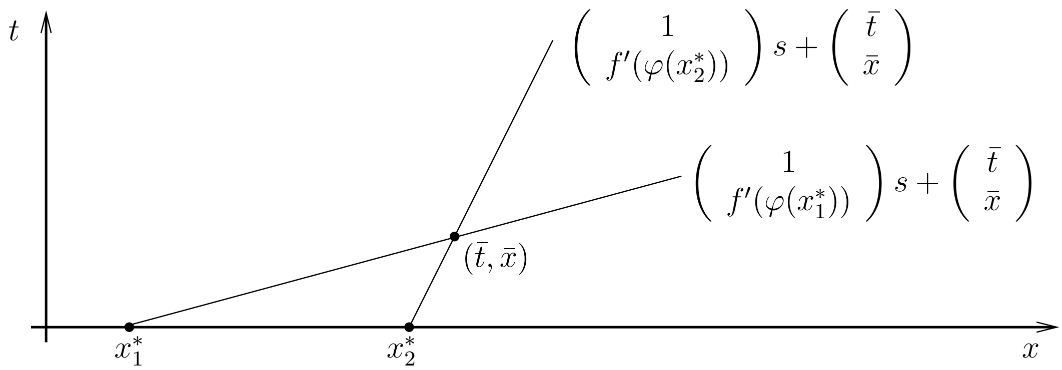
$$x\left(-\bar{t}\right) = -f'\left(\bar{u}\right)\bar{t} + \bar{x}\,.$$

Sei $x^* = x\left(-\bar{t}\right)$ und $u(0, x^*) = \varphi(x^*)$ die Anfangsbedingung. Der Punkt x^* ist aus der nichtlinearen Gleichung

$$x^* = -f'\left(\varphi(x^*)\right)\bar{t} + \bar{x}$$

zu berechnen und die Lösung an der Stelle $(\bar{t}, \bar{x})$ ist

$$u(\bar{t}, \bar{x}) = \varphi(x^*) .$$



Angenommen, dass zwei Punkte x_1^* und x_2^* auf der x-Achse existieren mit

$$\begin{gathered} x_1^* < x_2^*, \\ f'(\varphi(x_1^*)) > f'(\varphi(x_2^*)), \\ \varphi(x_1^*) \neq \varphi(x_2^*), \end{gathered}$$

dann schneiden sich die Charakteristiken in einem Punkt $(\bar{t}, \bar{x})$, in dem die Lösung u beide ungleichen Werte $\varphi(x_1^*)$ und $\varphi(x_2^*)$ annehmen muss. Die Lösung u wird damit unstetig. Diese wichtige Eigenschaft der „Schock"-Bildung hängt nicht von der Glattheit der Funktionen f und φ ab. D. h. die klassische (glatte) Lösung u existiert nur bis zur ersten Lösung der Gleichung

$$x_2^* - x_1^* = \bar{t}\,(f'(\varphi(x_1^*)) - f'(\varphi(x_2^*))), \quad x_2^* > x_1^*.$$

Nur wenn die Funktion $f'(\varphi(x))$ monoton wachsend ist, gibt es keine Lösungen dieser Gleichung und die klassische Lösung existiert für alle $t > 0$.

Beispiel 3.6.1. *„Die Bürgers-Gleichung"*

$$\begin{gathered} u_t + u u_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

Es gilt $f(u) = u^2/2$ und $f'(u) = u$. Damit ist der Schnittpunkt der Charakteristik mit der x-Achse (x^*) aus der Gleichung

$$x^* = -\frac{1}{1 + (x^*)^2}\bar{t} + \bar{x}, \quad \bar{t} > 0 \quad \bar{x} \in \mathbb{R}$$

zu bestimmen. Diese Gleichung ist zu der kubischen Gleichung

$$(x^*)^3 - \bar{x}(x^*)^2 + x^* + \bar{t} - \bar{x} = 0$$

äquivalent. Eine kubische Gleichung hat immer eine reelle Lösung oder zwei oder drei. Daher kann die Lösung $u(\bar{t}, \bar{x})$ sogar dreiwertig werden. Betrachten wir zunächst die Gerade $\bar{t} = \bar{x}$ und die Lösung u entlang dieser Geraden, d. h. $u(\bar{x}, \bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Die kubische Gleichung vereinfacht sich zu

$$(x^*)^3 - \bar{x}(x^*)^2 + x^* = 0$$

und $x_1^* = 0$ ist immer eine Lösung. Die weiteren Lösungen

$$x_{2,3}^* = \frac{\bar{x} \pm \sqrt{\bar{x}^2 - 4}}{2}$$

sind für $|\bar{x}| \geq 2$ vorhanden. Für $\bar{x} = \pm 2$ gibt es zwei Lösungen $x_1^* = 0$, $x_2^* = \pm 1$ und für $|\bar{x}| > 2$ drei. Damit ergibt sich für die Lösung u

$$u(\bar{x},\, \bar{x}) = \begin{cases} 1 & \textit{für } |\bar{x}| < 2, \\ 1,\ 1/2 & \textit{für } |\bar{x}| = 2, \\ 1,\ \frac{2}{\bar{x}^2 \pm \bar{x}\sqrt{\bar{x}^2 - 4}} & \textit{für } |\bar{x}| > 2. \end{cases}$$

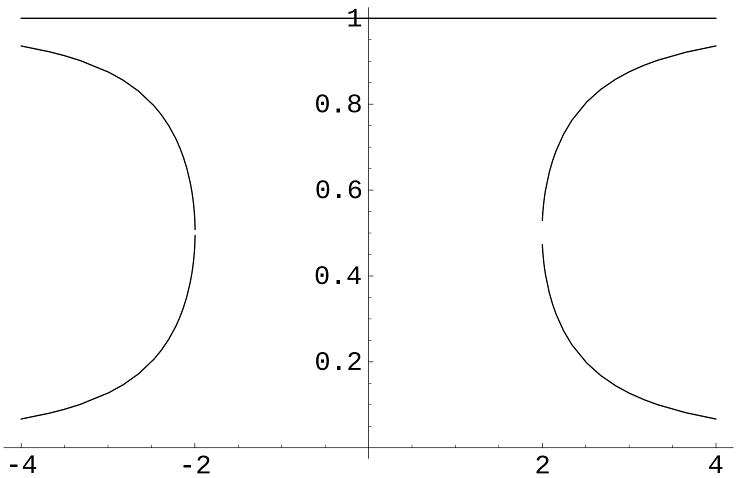


Abbildung 3.4: Die Lösung $u(\bar{x}, \bar{x})$ für $\bar{x} \in [-4, 4]$.

In der allgemeinen Situation führen wir die Substitution

$$x^* = z + \frac{\bar{x}}{3}$$

durch und erhalten

$$z^3 + \left(-\frac{1}{3}\bar{x}^2 + 1\right) z - \frac{2}{27}\bar{x}^3 - \frac{2}{3}\bar{x} + \bar{t} = 0.$$

Die Gleichung hat für

$$-\frac{1}{3}\bar{x}^2 + 1 > 0$$

genau eine reelle Lösung, d. h. auf dem Intervall $\left(-\sqrt{3},\,\sqrt{3}\right)$ *bleibt die Lösung immer klassisch. Für* $|\bar{x}| > \sqrt{3}$ *wird die Lösung mehrdeutig. Der Zeitpunkt, bei dem das zum ersten Mal passiert, ist i. Allg. leider schwer analytisch zu berechnen.*

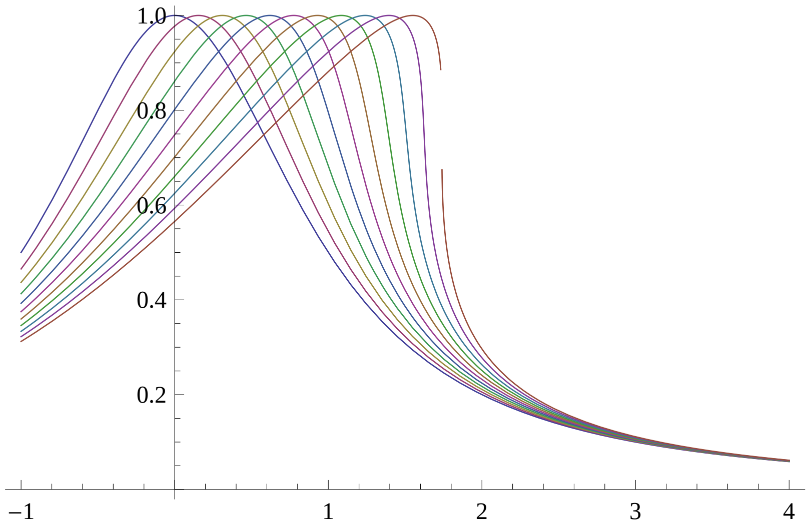


Abbildung 3.5: Die Funktion $u\,(\bar{t}_k,\,\bar{x})$, $k = 1,\ldots,10$ für zehn Zeitpunkte $t_1 = 0,\ldots,t_{10} = 1,55$, $\bar{x} \in [-1,4]$.

Man kann klar erkennen wie sich die Singularität an der Stelle $\bar{x} = \sqrt{3} \approx 1.73$ *herausbildet.*

3.7 Schwache Lösung Rankine-Hugoniot-Bedingung

Wir betrachten das allgemeine Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f_j(u)}{\partial x_j} &= 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^d\,, \\ u(0,x) &= u_0(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^d\,. \end{aligned}$$

Sei $\mathbb{C}_0^1\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\right)$ der Raum der $\mathbb{C}^1$-Funktionen mit kompaktem Träger. Sei u zunächst ebenfalls eine $\mathbb{C}^1$-Funktion. Dann ist die Gleichung punktweise erfüllt und wir erhalten für eine Funktion $\varphi \in \mathbb{C}_0^1\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\right)$

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f_j(u)}{\partial x_j} \right) \varphi\, dxdt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} f_j(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dxdt + \int_{\mathbb{R}^d} u(0,x)\varphi(0,x)\, dx\,. \end{aligned}$$