Eine Funktion $u \in \left(\mathbb{L}^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})\right)^n$ heißt schwache Lösung des Anfangswertproblems, falls für alle $\varphi \in \mathbb{C}^1_0\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\right)$ die Gleichung

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d f_j(u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dxdt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)dx = 0$$

erfüllt ist. Wenn eine schwache Lösung eine $\mathbb{C}^1$-Funktion als einen Repräsentanten besitzt, ist diese die klassische Lösung.
Die schwache Lösung besteht aus glatten Komponenten ($\mathbb{C}^1$-Funktionen in Teilgebieten) und Unstetigkeiten, die sich durch glatte orientierbare Oberflächen in dem (t,x)-Raum $\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\right)$ beschreiben lassen. Sei Σ eine solche Oberfläche und

$$n = \left(n_t, n_{x_1}, \ldots, n_{x_d}\right)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad |n| = 1$$

der Normalenvektor an Σ an der Stelle (t,x). Wir bezeichnen mit

$$u_\pm(t,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} u\left((t,x) \pm \varepsilon n\right), \quad (t,x) \in \Sigma$$

die beiden (unteschiedlichen) Grenzwerte der Funktion u an der Oberfläche Σ.
Die Funktion u ist dann die klassische Lösung des Anfangswertproblems in allen Gebieten, in denen u eine $\mathbb{C}^1$-Funktion ist. Auf den Oberflächen der Unstetigkeit erfüllt u die sog. Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung

$$\left(u_+ - u_-\right) n_t + \sum_{j=1}^d \left(f_j\left(u_+\right) - f_j\left(u_-\right)\right) n_{x_j} = 0\,. \qquad \text{(Übung)}$$

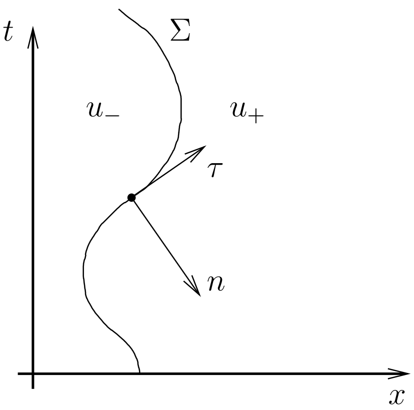
Mit der Bezeichnung $[u] = u_+ - u_-$ gilt

$$n_t[u] + \sum_{j=1}^d n_{x_j}\left[f_j(u)\right] = 0\,.$$

Im eindimensionalen Fall ($d = 1$) ist Σ eine Kurve in der (t,x)-Ebene, die in der Parameterform die Form

$$\Sigma = \left\{ (t,x)^\top \,:\, (t,x)^\top = \begin{pmatrix} t \\ \xi(t) \end{pmatrix} \right\}$$

hat. Damit ist die Tangente $\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix}$ und die Normale $n = \begin{pmatrix} -\dot{\xi}(t) \\ 1 \end{pmatrix}\left(1 + \dot{\xi}^2(t)\right)^{-1/2}$.



Wir erhalten $\dot{\xi}(t)[u] = [f(u)]$, wobei $\dot{\xi}(t) = \frac{[f(u)]}{[u]}$ die „Geschwindigkeit" des Schocks ist.

Beispiel 3.7.1. *„Riemann-Problem für die Bürgers-Gleichung"*

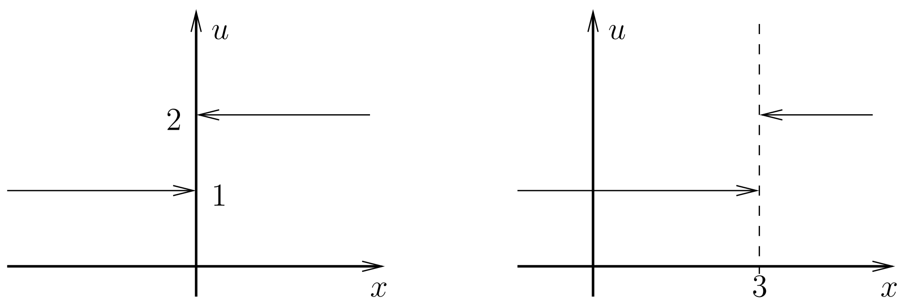
$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) &= \begin{cases} u_\ell\,, & x < 0 \\ u_r\,, & x > 0 \end{cases} \quad \textit{mit } u_\ell \neq u_r\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Unstetigkeit von Anfang an vorhanden und es gilt

$$\xi(0) = 0\,, \quad \dot{\xi}(t) = \frac{\frac{1}{2}u_r^2 - \frac{1}{2}u_\ell^2}{u_r - u_\ell} = \frac{u_r + u_\ell}{2} \quad \Longrightarrow \quad \xi(t) = \frac{u_r + u_\ell}{2}\,t\,.$$

Damit lautet eine mögliche schwache Lösung

$$u(t,x) = \begin{cases} u_\ell\,, & x < \frac{u_r+u_\ell}{2}t\,, \\ u_r\,, & x > \frac{u_r+u_\ell}{2}t\,. \end{cases}$$



$t = 0$ $t = 2$

Die Kurve Σ ist eine Gerade

$$\Sigma = \left\{ (t,x)^\top = \left(t, \frac{3}{2}t\right)^\top\,, \quad t \geq 0 \right\}\,.$$

Andererseits gilt mit $a > \max(u_\ell, -u_r)$*, dass*

$$s_1 = \frac{u_\ell - a}{2} < 0 \quad \textit{und} \quad s_2 = \frac{u_r + a}{2} > 0\,.$$

Damit ist die Funktion

$$u(t,x) = \begin{cases} u_\ell, & x < s_1 t\,, \\ -a, & s_1 t < x < 0\,, \\ a, & 0 < x < s_2 t\,, \\ u_r, & x > s_2 t\,. \end{cases}$$

ebenfalls eine schwache Lösung.

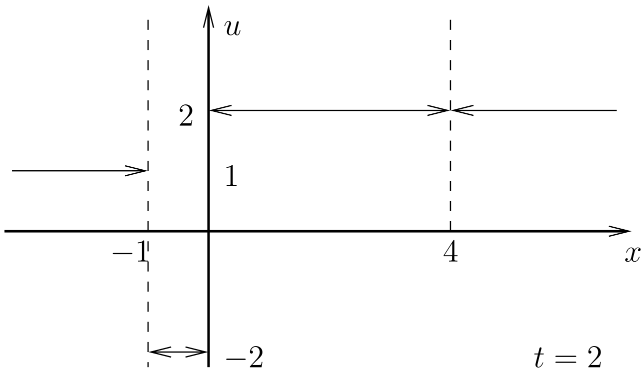


Abbildung 3.6: Z. B. für $u_\ell = 1$, $u_r = 2$, $a = 2$ gilt $s_1 = -\frac{1}{2}$, $s_2 = 2$.

Für $u_\ell < u_r$ *können wir sogar eine stetige Lösung konstruieren. Zunächst überprüfen wir, dass die Funktion*

$$u(t,x) = \frac{x}{t}\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

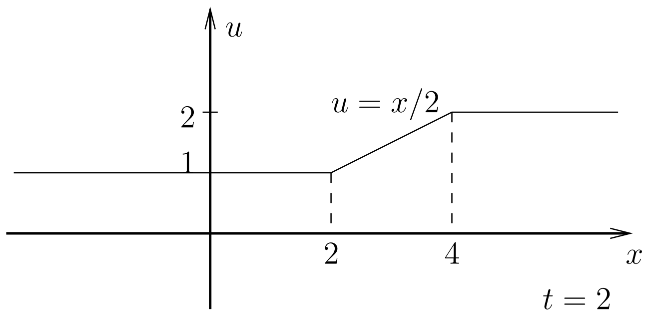
formal die Bürgers-Gleichung löst

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}\,, \quad u u_x = \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{x}{t^2}\,.$$

Damit löst die Funktion

$$u(t,x) = \begin{cases} u_\ell & , \quad x < u_\ell t\,, \\ x/t & , \quad u_\ell t \le x \le u_r t\,, \\ u_r & , \quad x > u_r t \end{cases}$$

ebenfalls das Anfangswertproblem. Da u *keine* $\mathbb{C}^1$*-Funktion ist, ist diese Lösung ebenfalls schwach.*



Damit ist die schwache Lösung des Anfangswertproblems für ein hyperbolisches System von Erhaltungsgleichungen nicht eindeutig. Man benötigt ein Kriterium um die eindeutige, physikalisch relevante Lösung auszusortieren. Dieses Kriterium basiert auf der sog. Entropie und stellt z. B. fest, dass die stetige Lösung (s. o.) (Verdünnungswelle) physikalisch relevant ist. Für eine skalare Gleichung gilt das Theorem ($n = 1$).

Satz 3.7.2. *Sei $u_0 \in \mathbb{L}_\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f_j(u)}{\partial x_j} = 0\,, \quad u(0,x) = u_0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

eine eindeutige Entropie-Lösung mit $\|u\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \le \|u_0\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}$.

3.8 Allgemeines Riemann-Problem

Seien u_ℓ und u_r zwei Vektoren aus dem Zustandsraum Ω und $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Lösung des Riemann-Anfangswertproblems (eindimensional) für ein strikt hyp. System

$$\begin{aligned} u_t + (f(u))_x &= 0 \\ u(0,x) = u_0(x) &= \begin{cases} u_\ell & , \quad x < 0 \\ u_r & , \quad x > 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Durch die Lösung der Bürgers-Gleichung motiviert, suchen wir die Lösung in der sog. selbstähnlichen Form

$$u(t,x) = v\left(\frac{x}{t}\right)\,, \quad v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n.$$

Die klassische Lösung erfüllt die Gleichung

$$u_t + A(u)u_x = 0\,,$$

wobei $A(u) = f'(u) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)_{i,j=1}^{n}$. Damit gilt

$$u_t = v'\left(\frac{x}{t}\right)\left(-\frac{x}{t^2}\right)\,, \quad u_x = v'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}$$

und mit $\xi = x/t$ erhalten wir

$$A(v(\xi))v'(\xi) = \xi v'(\xi)\,.$$

Offensichtlich ist entweder $v'(\xi) = 0$ oder $v'(\xi)$ ist ein Eigenvektor der Matrix $A(v(\xi))$ zum Eigenwert ξ. Im zweiten Fall existiert also ein Index $1 \le k \le n$ mit

$$v'(\xi) = \alpha(\xi)\, r_k(v(\xi))\,, \quad \lambda_k(v(\xi)) = \xi\,.$$

Als Folgerung der zweiten Gleichung erhalten wir

$$(\lambda_k'(v(\xi))\,, v'(\xi)) = 1 \neq 0\,,$$

wobei λ_k' den Gradienten $\left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial v_1}, \dots \frac{\partial \lambda_k}{\partial v_n}\right)^\top \in \mathbb{R}^n$ abkürzt. Gilt diese Eigenschaft für alle $u \in \Omega$, d. h.

$$(\lambda_k'(u)\,,\, r_k(u)) \neq 0\,, \quad \forall u \in \Omega\,, \quad 1 \le k \le n\,,$$

so nennt man das System echt nichtlinear (genuinely nonlinear).
Damit ist $v(\xi)$ entweder konstant $v'(\xi) = 0$ oder löst das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$v'(\xi) = \alpha(\xi) r_k\left(v(\xi)\right)$$

mit der Anfangsbedingung

$$v\left(\lambda_k\left(u_\ell\right)\right) = u_\ell\,.$$

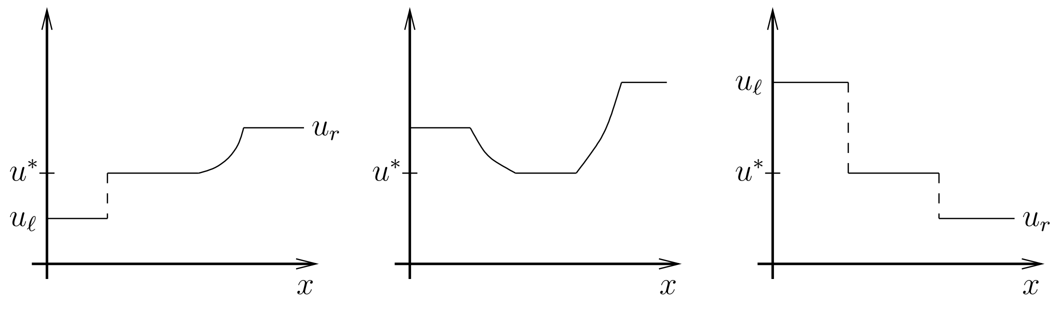
Für $u_r > u_\ell$ wird $\lambda_k\left(v(\xi)\right)$ von u_ℓ bis u_r auf der Integrationskurve wachsen und kann u_r „treffen“ $\lambda_k\left(v(u_r)\right) = u_r$. Die Lösung des Riemann-Problems ist damit stetig

$$u(t,x) = \begin{cases} u_\ell & , \quad x \le \lambda_k(u_\ell)t\,, \\ v(x/t) & , \quad \lambda_k(u_\ell)t \le x \le \lambda_k(u_r)t\,, \\ u_r & , \quad x \ge \lambda_k(u_r)t\,. \end{cases}$$

Diese selbstähnliche Lösung nennt man die k-te Verdünnungswelle, die die Zustände u_ℓ und u_r verbindet.
Allgemein besteht die Lösung eines Riemann-Problems aus einer Kombination von Schock- und Verdünnungswellen, wobei die Schockwellen die Rankine-Hygoniot-Bedingung

$$\dot{\xi}(t)[u] = [f(u)]$$

erfüllen.



3.9 Finite-Volumen-Verfahren

Das Hauptproblem bei der numerischen Lösung nichtlinearer hyperbolischer Gleichungen ist die Notwendigkeit, die Unstetigkeiten in der schwachen Lösung zu approximieren. Ein weiteres Problem ist, dass formal äquivalente Probleme (d. h. für die glatten Lösungen) evtl. verschiedene schwache Lösungen besitzen. Die Gleichungen

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \quad \text{und} \quad \left(u^2\right)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x = 0$$

besitzen offenbar dieselbe glatten Lösungen und wegen

$$\dot{\xi}_1(t) = \frac{\left[\frac{1}{2}u^2\right]}{[u]} = \frac{u_\ell + u_r}{2}\,, \quad \dot{\xi}_2(t) = \frac{\left[\frac{2}{3}u^3\right]}{[u^2]} = \frac{2}{3}\,\frac{u_r^3 - u_\ell^3}{u_r^2 - u_\ell^2}$$

zwei verschiedene Geschwindigkeiten der Schockwelle des Riemann-Problems. Der Versuch, die einfachste Differenzenmethode für lineare Gleichungen zu verallgemeinern, scheitert.

Beispiel 3.9.1.

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \\ u(0,x) &= \begin{cases} 1\,, & x < 0 \\ 0\,, & x \geq 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Seien $\tau > 0$ und $h > 0$ Diskretisierungsparameter und $u_i^j \approx u(t_j, x_i)$, $j = 0, 1, 2 \ldots$, $i \in \mathbb{Z}$. Das explizite Schema

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{\tau}{h}u_i^j\left(u_i^j - u_{i-1}^j\right)\,, \quad u_i^0 = \begin{cases} 1\,, & i < 0 \\ 0\,, & i \geq 0 \end{cases}$$

erfüllt offenbar $u_i^j = u_i^0$, $\forall i$ und damit $u_i^j = u_i^0$ für $j = 1, 2, \ldots$, $i \in \mathbb{Z}$. Damit ist die numerische Lösung vollständig falsch.

Der Ausweg besteht darin, sog. konservative Methoden zu betrachten. Für die Gleichung

$$\begin{aligned} &u_t + \left(f(u)\right)_x = 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R} \\ &u(0,x) = u_0(x)\,, \end{aligned}$$

betrachten wir das Schema

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{\tau}{h}\Big(F\left(u_{i-p}^j, \ldots, u_{i+q}^j\right) - F\left(u_{i-p-1}^j, \ldots, u_{i+q-1}^j\right)\Big)$$

mit einer Funktion $F : \mathbb{R}^{p+q+1} \to \mathbb{R}$, die der numerische Fluss genannt wird. Die einfachste Variante ist $p = 0$, $q = 1$, d. h.

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{\tau}{h}\Big(F\left(u_i^j, u_{i+1}^j\right) - F\left(u_{i-1}^j, u_i^j\right)\Big).$$

Wenn wir die gegebene Gleichung $u_t + (f(u))_x = 0$ über ein Zeitintervall $[t_j, t_{j+1}]$ und über ein Ortsintervall $[x_i - h/2, x_i + h/2]$ (Finite Volumen) integrieren, erhalten wir

$$0 = \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Big(u\left(t_{j+1}, x\right) - u\left(t_j, x\right) \Big) dx + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Big(f\left(u\left(t, x_{i+1/2}\right)\right) - f\left(u\left(t, x_{i-1/2}\right)\right) \Big) dt$$

mit $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm h/2$, oder

$$\bar{u}_i^{j+1} = \bar{u}_i^j - \frac{1}{h} \left(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f\left(u\left(t, x_{i+1/2}\right)\right) dt - \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f\left(u\left(t, x_{i-1/2}\right)\right) dt \right) ,$$

wobei

$$\bar{u}_i^j = \frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u\left(t_j, x\right) dx$$

den „Mittelwert“ der Funktion u über dem finiten Volumen $[x_i - h/2, x_i + h/2]$ bezeichnet. Damit muss die Funktion F den in der Zeit gemittelten Fluss approximieren

$$F\left(u_i^j, u_{i+1}^j\right) \approx \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f\left(u\left(t, x_{i+1/2}\right)\right) dt \,,$$

z. B. als $F\left(u_i^j, u_{i+1}^j\right) = f\left(u_i^j\right)$. Für die Bürgers-Gleichung ergibt sich das Schema

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{\tau}{h} \left(\frac{1}{2} \left(u_i^j\right)^2 - \frac{1}{2} \left(u_{i-1}^j\right)^2 \right) , \quad u_i^0 = u_0\left(x_i\right) .$$

Dabei setzen wir voraus, dass $u_i^j \geq 0 \,, \forall i, j$, d. h. die Upwind-Richtung stimmt. Für allgemeine Systeme kann das nur gehen, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $J(u) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(u) \right)$ für alle u nichtnegativ sind. Das gilt nicht immer und sogar für eine skalare Gleichung ist es u. U. notwendig, die Richtung zu ändern.

Beispiel 3.9.2. *„Lax-Friedrichs-Verfahren“*

$$u_i^{j+1} = \frac{u_{i-1}^j + u_{i+1}^j}{2} - \frac{\tau}{2h} \left(f\left(u_{i+1}^j\right) - f\left(u_{i-1}^j\right) \right)$$

oder in der konservativen Form mit

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{\tau}{h} \left(F\left(u_i^j, u_{i+1}^j\right) - F\left(u_{i-1}^j, u_i^j\right) \right) ,$$
$$F\left(u_i^j, u_{i+1}^j\right) = \frac{h}{2\tau} \left(u_i^j - u_{i+1}^j\right) + \frac{1}{2} \left(f\left(u_i^j\right) + f\left(u_{i+1}^j\right) \right) .$$

Ein Finite-Volumen-Verfahren heißt konsistent, wenn

$$F(u,u) = f(u)\,, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

gilt. Die Lipschitz-Bedingung

$$|F(u,v) - f(w)| \leq L \max\left(|u-w|\,,\,|v-w|\right)$$

garantiert die Konsistenz.
Die Integralform der Erhaltungsgleichung lautet

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} u\left(t_2, x\right) dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} u\left(t_1, x\right) dx - \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(f\left(u\left(t, x_2\right)\right) - f\left(u\left(t, x_1\right)\right)\right) dt$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$. Für die diskrete Gleichung erhalten wir durch das Summieren von $i = i_1$ bis $i_2 > i_1$

$$\begin{aligned} h\sum_{i=i_1}^{i_2} u_i^{j+1} &= h\sum_{i=i_1}^{i_2} u_i^j - \tau \sum_{i=i_1}^{i_2} \left(F\left(u_i^j, u_{i+1}^j\right) - F\left(u_{i-1}^j, u_i^j\right)\right) \\ &= h\sum_{i=i_1}^{i_2} u_i^j - \tau\left(F\left(u_{i_2}^j, u_{i_2+1}^j\right) - F\left(u_{i_1-1}^j, u_{i_1}^j\right)\right)\,. \end{aligned}$$

Wenn die Lösung u für alle $t_1 \leq t \leq t_2$ außerhalb des Intervalls $[x_1, x_2]$ konstant ist, z. B.

$$u(t,x) = \begin{cases} u_{-\infty}\,, & t \in [t_1, t_2]\,, \quad x \leq x_1\,, \\ u_{+\infty}\,, & t \in [t_1, t_2]\,, \quad x \geq x_1\,, \end{cases}$$

gilt

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} u\left(t_2, x\right) dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} u\left(t_1, x\right)\, dx - \left(t_2 - t_1\right)\left(f\left(u_{+\infty}\right) - f\left(u_{-\infty}\right)\right) \tag{3.4}$$

und in der diskreten Form

$$h\sum_{i=i_1}^{i_2} u_i^{j+1} = h\sum_{i=i_1}^{i_2} u_i^j - \tau\left(f\left(u_{+\infty}\right) - f\left(u_{-\infty}\right)\right)\,,$$

wobei die Konsistenz $F\left(u_{i_2}^j, u_{i_2+1}^j\right) = F\left(u_{+\infty}, u_{+\infty}\right) = f\left(u_{\infty}\right)$ (analog für $u_{-\infty}$) benutzt wurde. Für $j_1 < j_2$ gilt damit

$$h\sum_{i=i_1}^{i_2} u_i^{j_2} = h\sum_{i=i_1}^{i_2} u_i^{j_1} - \left(t_2 - t_1\right)\left(f\left(u_{+\infty}\right) - f\left(u_{-\infty}\right)\right)\,, \quad t_2 = j_2\tau\,, \quad t_1 = j_1\tau\,.$$

Wenn für $t_1 = 0$, d. h. $j_1 = 0$ die Eigenschaft

$$h \sum_{i=i_1}^{i_2} u_i^0 = \int\limits_{x_{i_1-1/2}}^{x_{i_2+1/2}} u_0(x)\,dx$$

gilt, die z. B. für $u_i^0 = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_0(x)\,dx$ erfüllt ist, gilt analog für $j_2 > 0$, wegen (3.4)

$$h \sum_{i=i_1}^{i_2} u_i^{j_2} = \int\limits_{x_{i_1-1/2}}^{x_{i_2+1/2}} u\,(t_2, x)\,dx\,.$$

Solche numerische Methoden heißen konservativ. Es gilt das Lax-Wendroff-Theorem.

Satz 3.9.3. *Betrachte eine Folge von Gittern mit $\tau_k, h_k \to 0$ für $k \to \infty$. Sei $U_k(t,x)$ die stückweise konstante Funktion mit Werten u_i^j auf dem Zeitintervall $(t_j, t_{j+1}]$ und dem Ortsintervall $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Ist das Finite-Volumen-Verfahren konsistent und konservativ, und konvergiert die Folge $\{U_k\}$ fast überall (Nullmengen sind die evtl. Ausnahme) zu einer Funktion u, dann ist u schwache Lösung der Erhaltungsgleichung.*

Das Theorem gibt keine Garantie, daß die erhaltene Lösung die richtige, d. h. die eindeutige schwache Entropie-Lösung ist.