Kapitel 4

Gleichungen zweiter Ordnung

4.1 Typeneinteilung bei Gleichungen zweiter Ordnung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und

$$a, b, c, d, e, f, g : \Omega \to \mathbb{R}$$

gegebene Funktionen. Die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Variablen x und y lautet

$$\begin{aligned} &a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} \\ &\qquad + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y)\,,\ (x,y) \in \Omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Definition 4.1.1. *Die Gleichung* (4.1) *heißt in* (x, y)

a) hyperbolisch, falls $b^2 - ac > 0$ *in* (x, y)*,*

b) elliptisch, falls $b^2 - ac < 0$ *in* (x, y)*,*

c) parabolisch, falls $b^2 - ac = 0$ *und* rank $\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \end{pmatrix} = 2$ *in* (x, y) *erfüllt ist.*

Beispiel 4.1.2. *a) Die Laplace-Gleichung*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ist elliptisch, $a = 1$*,* $b = 0$*,* $c = 1 \Rightarrow b^2 - ac = -1 < 0$*.*

b) Die Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx}$$

ist hyperbolisch, $a = 1$*,* $b = 0$*,* $c = -1 \Rightarrow b^2 - ac = 1 > 0$*.*

c) *Die Wärmeleitungsgleichung*

$$u_t = u_{xx}$$

ist parabolisch,
$a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\ e = -1 \Rightarrow b^2 - ac = 0,\ \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2.$

Die mehrdimensionale Verallgemeinerung ist wie folgt. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und

$$A : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}, \quad a : \Omega \to \mathbb{R}^d, \quad b : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}$$

gegebene Funktionen. Die allgemeine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet für $x \in \Omega$

$$\text{div}\,(A(x)\text{grad}\,u) + (a(x), \text{grad}\,u) + b(x)u = f(x).$$

Für eine symmetrische Matrix $A(x) = A^\top(x)$, $x \in \Omega$ heißt die Gleichung

a) elliptisch, falls $\lambda_j\,(A(x)) > 0$ oder $\lambda_j\,(A(x)) < 0$, $j = 1, \ldots, d$, $x \in \Omega$,

b) hyperbolisch, falls $d-1$ Eigenwerte von $A(x)$ gleiches Vorzeichen besitzen und ein Eigenwert das andere Vorzeichen hat,

c) parabolisch, falls ein Eigenwert gleich Null ist, die übrigen das gleiche Vorzeichen haben und

$$\text{rank}\left(A(x) \vdots a(x)\right) = d$$

erfüllt ist.

Durch die obige Definition sind nicht alle Fälle abgedeckt. Die übrigen Gleichungen heißen ultrahyperbolisch und finden kaum Anwendung.

4.2 Räumliche und zeitliche Wärmeausbreitung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet (ein Körper) und $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ die Temperatur, $u(t,x)$, $t > 0$, $x \in \Omega$ ist die Temperatur des Körpers an der Stelle x zur Zeit t. Die physikalische Dimension der Temperatur ist das Kelvin, bezeichnet mit $[K]$, früher lautete der Name „Grad Kelvin“, $[^\circ K]$.
Ist die Temperatur nicht konstant, so entsteht ein Wärmefluß von den Stellen höherer Temperatur zu Stellen mit niedrigerer Temperatur. Die vektorielle Dichte des Wärmestromes wird als q bezeichnet und hat die Dimension $[\frac{J}{m^2 s}]$. Sie beschreibt die übertragene Wärmemenge pro Fläche und Zeit, wobei das Joule $[J]$ die Einheit der Größen Energie, Arbeit und Wärmemenge bezeichnet. Es gilt

$$1J = 1\frac{kg\,m^2}{s^2} = 1Nm = 1Ws.$$

Es gilt das empirische Fourier-Gesetz

$$q = -k(x)\operatorname{grad} u,$$

wobei der Koeffizient k, die Wärmeleitfähigkeit $[\frac{J}{m\,s\,K}]$, vom Material des Körpers abhängt. Für die Wärmemenge, die durch eine Fläche S im Zeitintervall (t_1, t_2) fließt, gilt dann

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{t_1}^{t_2}\int_S (q(t,x),\, n(x))\, ds_x\, dt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\int_S k(x)\,(\operatorname{grad} u(x),\, n(x))\, ds_x\, dt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\int_S k(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) ds_x\, dt. \end{aligned}$$

Andererseits ist die Wärmemenge, die notwendig ist, um die Temperatur von $u\,(t_1, x)$ zu $u\,(t_2, x)$ zu verändern, gleich

$$Q_2 = \int_V c(x)\rho(x)\,(u\,(t_2, x) - u\,(t_1, x))\, dx,$$

wobei ρ die Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ und c die spezifische Wärmekapazität $[\frac{J}{kg\,K}]$ bezeichnen. Bezeichnen wir mit f $[\frac{J}{m^3 s}]$ die Dichte der Wärmequellen, so erhalten wir für die im Volumen V im Zeitintervall (t_1, t_2) frei werdende Wärmemenge

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2}\int_V f(t,x)\, dx\, dt.$$

Das Energieerhaltungsgesetz lautet

$$Q_2 = Q_3 - Q_1.$$

Mit dem Satz von Gauß ergibt sich

$$\int_V c(x)\,\rho(x)\,(u\,(t_2, x) - u\,(t_1, x))\, dx = -\int_{t_1}^{t_2}\int_V \operatorname{div} q(t,x) dx\, dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_V f(t,x) dx\, dt.$$

Für den Grenzübergang $t_1, t_2 \to t$ erhalten wir für eine glatte Funktion u

$$\int_V \left(c(x)\,\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad}\, u(t,x)) - f(t,x)\right) dx = 0$$

und damit die Wärmeleitungsgleichung

$$c\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \Omega.$$

Ist der Körper homogen, d. h. $c, \rho, k = const$, so schreibt man

$$u_t = a^2 \Delta u + g$$

mit $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ und $g = \frac{f}{c\rho}$. Es ist nur noch die Anfangsbedingung

$$u(0, x) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega$$

sowie eine Randbedingung

a) $u(t, x) = \mu_1(t, x)$ (Dirichlet-Randbedingung),

b) $k(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \mu_2(t, x)$ (Neumann-Randbedingung) oder

c) $k(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sigma\left(u(t, x) - \mu_3(t, x)\right)$ (Robin-Randbedingung)

für $t > 0$, $x \in \Gamma = \partial\Omega$, zu formulieren.

4.3 Die Diffusionsgleichung

Ist ein Körper ungleichmäßig mit einem Gas gefüllt, so erfolgt Diffusion von Stellen höherer Konzentration zu Stellen mit niedrigerer Konzentration. Die Diffusionsgleichung lautet

$$cu_t = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u)\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \Omega\,,$$

wobei u [1] die Konzentration, $c = \frac{V_p}{V}$ [1] den Porösitätskoeffizient und $D[\frac{m^2}{s}]$ den Diffusionskoeffizient bezeichnen. Die Wärmeleitungs- sowie die Diffusionsgleichung sind parabolisch.

4.4 Stationäre Gleichungen

Die Wärmeleitungsgleichung eines homogenen Körpers Ω lautet

$$u_t = a^2 \Delta u + g\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \Omega\,.$$

Liegt ein stationäres Wärmefeld $u = u(x)$, $g = g(x)$, $x \in \Omega$ vor, genügt die Funktion u der Poisson-Gleichung

$$\Delta u = -\tilde{g}\,, \quad x \in \Omega\,, \quad \tilde{g} = f/k.$$

Gilt zusätzlich $f = \tilde{g} = 0$, $x \in \Omega$, so ist die Funktion u harmonisch

$$\Delta u = 0\,, \quad x \in \Omega\,,$$

d. h. sie genügt der Laplace-Gleichung.
Als zweites Beispiel betrachten wir die Potentialströmung einer quellenfreien Flüssigkeit. Im Inneren eines Gebietes Ω betrachten wir das Geschwindigkeitsfeld $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ einer inkompressiblen (d. h. $\rho = const$) wirbelfreien (d. h. $\operatorname{curl} u = 0$) Flüssigkeit. Wegen $\operatorname{curl} u = 0$ gibt es ein Potential, d. h. eine skalare Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ derart, daß

$$u = -\operatorname{grad} \varphi$$

ist. Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\, u) = 0$$

folgt wegen $\rho = const$ die Gleichung

$$\operatorname{div} u = 0$$

und damit die Laplace-Gleichung für das Potential

$$\Delta\varphi = 0\,, \quad x \in \Omega.$$

Als nächstes betrachten wir die stationären Maxwell-Gleichungen in einem homogenen Medium Ω. Das elektrische Feld ist daher wirbelfrei $\operatorname{curl} E = 0$ und deswegen ein Potentialfeld $E = -\operatorname{grad} \varphi$. Treten in dem Medium keine räumlichen Stromquellen auf, so ist

$$\operatorname{div} J = 0,$$

wobei J die Stromdichte ist und das Ohmsche Gesetz $J = \sigma E$ erfüllt. Wegen $\sigma = const$ ist das Potential harmonisch, denn

$$0 = \operatorname{div} J = \operatorname{div}(\sigma E) = -\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi) = -\sigma\Delta\varphi.$$

Schließlich betrachten wir die stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f = 0,$$

sie ist für $k(x) \geq k_0 > 0$, $x \in \Omega$ elliptisch.