Kapitel 5

Parabolische Differentialgleichungen

Die allgemeine Gleichung, die wir betrachten ist

$$\begin{aligned} c\,\rho\, u_t &= \operatorname{div}(k\,\mathrm{grad}\; u) + f\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \Omega\,, \\ u(0,x) &= u_0(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \end{aligned}$$

mit c, ρ, $k > 0$ und mit einer der Randbedingungen auf $\Gamma = \partial\Omega$.

5.1 Das Maximumprinzip

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + f\,, \quad t \in (0,T]\,, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d\,, \quad d = 1,2,3, \\ u(0,x) &= u_0(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \\ u(t,x) &= \mu(t,x)\,, \quad t \in (0,T]\,, \quad x \in \Gamma\,, \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^d$ und $(0,T)$ ein endliches Zeitintervall ist. Mit

$$\Gamma_p = ([0,T] \times \Gamma) \cup (\{t = 0\} \times \Omega)$$

bezeichnen wir den sog. parabolischen Rand.

Satz 5.1.1. *Sei u die glatte Lösung und es gelte*

$$u_t - \Delta u \le 0\,, \quad t \in (0,T]\,, \quad x \in \Omega\,.$$

Dann nimmt u sein Maximum auf Γ_p an.

Beweis. Sei

$$M = \max_{\substack{t\in[0,T],\\ x\in\bar\Omega}} u(t,x) = u\,(t^*, x^*)$$

und es gelte $(t^*, x^*) \in (0,T] \times \Omega$, d. h. $(t^*, u^*) \notin \Gamma_p$. Weiterhin sei

$$m = \max_{(t,x)\in\Gamma_p} u(t,x) \quad \text{mit} \quad m < M.$$

Sei $w(t,x) = u(t,x) + \varepsilon \left|x\right|^2$ mit $\varepsilon < \frac{M-m}{\max_{x\in\Gamma}|x|^2}$. Es gilt $w(t,x) \geq u(t,x)$ und daher $\max_{t\in[0,T],\, x\in\bar{\Omega}} w(t,x) = w(\bar{t},\bar{x}) \geq M$. Andererseits gilt auf Γ_p

$$\max_{(t,x)\in\Gamma_p} w(t,x) \leq m + \varepsilon \max_{x\in\Gamma} \left|x\right|^2 < M.$$

Deshalb gilt $(\bar{t},\bar{x}) \notin \Gamma_p$. In diesem Punkt gilt

$$w_t\left(\bar{t},\bar{x}\right) - \Delta w\left(\bar{t},\bar{x}\right) = \underbrace{u_t\left(\bar{t},\bar{x}\right) - \Delta u\left(\bar{t},\bar{x}\right)}_{\leq 0} - 2d\varepsilon < 0.$$

In $(\bar{t},\bar{x})$ liegt aber ein Maximum einer glatten Funktioin vor, daher gilt

$$\Delta w\left(\bar{t},\bar{x}\right) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}\left(\bar{t},\bar{x}\right) \leq 0$$

und entweder

$$w_t\left(\bar{t},\bar{x}\right) = 0 \text{ für } \bar{t} < T$$

oder

$$w_t\left(\bar{t},\bar{x}\right) \geq 0 \text{ für } \bar{t} = T.$$

Schließlich erhalten wir einen Widerspruch

$$w_t\left(\bar{t},\bar{x}\right) - \Delta w\left(\bar{t},\bar{x}\right) \geq 0.$$

□

Daher gilt: Wenn die Temperatur auf dem Rand Γ und im Anfangsmoment einen Wert M für $f = 0$ nicht übersteigt, so kann auch im Inneren des Körpers keine Temperatur erreicht werden, die höher als M ist. Für $u_t - \Delta u \geq 0$ gilt das Minimumprinzip.

Folgerung 5.1.2. *Die Lösung des Problems* (5.1) *ist eindeutig.*

Beweis. Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen des Problems (5.1). Dann gilt für die Differenz $v = u_1 - u_2$

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= 0, \quad t \in (0,T),\ x \in \Omega, \\ v(0,x) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ v(t,x) &= 0, \quad t \in (0,T),\ x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Damit sind sowohl das Maximum- als auch das Minimumprinzip gleichzeitig erfüllt und die Funktion v ist identisch Null! □

Folgerung 5.1.3. *Gilt*

$$\begin{aligned} u_t^{(i)} &= \Delta u^{(i)} + f, \quad t \in (0,T),\, x \in \Omega, \\ u^{(i)}(0,x) &= u_0^{(i)}(x), \quad x \in \Omega \\ u^{(i)}(t,x) &= \mu^{(i)}(t,x), \quad t \in (0,T],\, x \in \Gamma,\, i = 1,2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u_0^{(1)}(x) &\le u_0^{(2)}(x), \quad x \in \Omega, \\ \mu^{(1)}(t,x) &\le \mu^{(2)}(t,x), \quad t \in (0,T),\, x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$u^{(1)}(t,x) \le u^{(2)}(t,x), \quad t \in [0,T],\, x \in \bar{\Omega}.$$

Folgerung 5.1.4. *Wenn für zwei Lösungen $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$*

$$\left| u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x) \right| \le \varepsilon$$

auf Γ_p gilt, gilt diese Ungleichung überall, d. h. $\forall (t,x) \in [0,T] \times \bar{\Omega}$.

5.2 Trennung der Veränderlichen

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f,\ t > 0,\ x \in (0,\ell) = \Omega \subset \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in (0,\ell), \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0,\ t > 0. \end{cases}$$

Wir suchen die Lösung der homogenen Gleichung ($f = 0$) als $u(t,x) = X(x)T(t)$ und erhalten

$$X(x)\, T'(t) = a^2 X''(x)\, T(t)$$

oder

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = const.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$X'' + \lambda X = 0, \text{ für } x \in (0,\ell), \quad X(0) = X(\ell) = 0$$

und

$$T' + \lambda a^2 T = 0.$$

Bezüglich x handelt es sich um die sogenannte Schwingungsgleichung mit der allgemeinen Lösung

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Eine nichttriviale Lösung des Randwertproblems entsteht nur für

$$c_1 = 0 \text{ und } \lambda = \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, \; k = 1, 2, \ldots .$$

Die Lösungen $X = X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{\ell} x$ und $T = T_k(t) = c_k e^{-a^2 \lambda_k t}$ führen auf

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \frac{\pi k}{\ell} x, \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 .$$

Für $t = 0$ erhalten wir die Fourier-Sinus-Reihe der Anfangsbedingung u_0:

$$u(0,x) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{\pi k}{\ell} x$$

und damit

$$c_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u_0(\xi) \sin \frac{\pi k}{\ell} \xi \, d\xi .$$

Soll die Lösung u klassisch sein, muß man beweisen, daß die durch die Reihe definierte Funktion einmal bzgl. t und zweimal bzgl. x differenzierbar ist. Außerdem muß u der Gleichung genügen und in den Randpunkten (Γ_p), d. h. für $t = 0$, $x = 0$, $x = \ell$ stetig sein. Für eine stetige Funktion u_0 mit stückweise stetiger Ableitung und mit der Kompatibilitätsbedingung $u_0(0) = u_0(\ell) = 0$ ist das der Fall, da die Reihe gleichmäßig konvergiert. Für die Lösung ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u_0(\xi) \sin \frac{\pi k}{\ell} \xi \, d\xi \right) e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \frac{\pi k}{\ell} x \\
&= \int_0^{\ell} \left(\frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \frac{\pi k}{\ell} \xi \sin \frac{\pi k}{\ell} x \right) u_0(\xi) \, d\xi \\
&= \int_0^{\ell} G(t,x,\xi) u_0(\xi) \, d\xi ,
\end{aligned}$$

wobei

$$G(t,x,\xi) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \frac{\pi k}{\ell} \xi \sin \frac{\pi k}{\ell} x$$

die sog. Green-Funktion des Problems bezeichnet. Sei $u_0^{(\varepsilon)} \geq 0$ eine Funktion, die außerhalb des Intervalls $(\xi - \varepsilon, \, \xi + \varepsilon)$ gleich Null ist und die Eigenschaft

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} u_0^{(\varepsilon)}(x) \, dx = 1$$

besitzt. Für $\varepsilon \to 0$ ist sie somit eine Approximation der Dirak-Distribution. Es gilt (Mittelwertsatz)

$$u^{(\varepsilon)}(t,x) = \int_0^\ell G(t,x,\xi) u_0^{(\varepsilon)}(\xi)\, d\xi = G(t,x,\xi^*)$$

mit $\xi^* \in (\xi-\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)$. Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir $G(t,x,\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} u^{(\varepsilon)}(t,x)$. Hieraus folgt, daß $G(t,x,\xi)$ den Temperaturfluß eines augenblicklich auftretenden Wärmeschocks darstellt, der sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt $\xi \in (0,\ell)$ befindet. Die Green-Funktion ist nichtnegativ

$$G(t,x,\xi) \geq 0, \quad t > 0, \quad x,\xi \in (0,\ell).$$

5.3 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation einer Funktion $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\hat{u}(\xi) = F_{x\to\xi}[u](\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{i(x,\xi)}\, dx.$$

Die Rücktransformation lautet

$$u(x) = F^{-1}_{\xi\to x}[\hat{u}](x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) e^{-i(\xi,x)}\, d\xi.$$

Hinreichend aber nicht notwendig für die Existenz der Fourier-Transformation ist, daß die Funktion $u \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^d)$, d. h. Lebesgue-integrierbar ist, denn es gilt

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|\, dx = \|u\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Die Funktion $\hat{u}$ ist damit eine stetige, beschränkte Funktion $\hat{u} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^d)$. Eine wichtige Eigenschaft der Fourier-Transformation ist

$$F_{x\to\xi}[\partial^\alpha u](\xi) = (-1)^{|\alpha|}(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi),$$

wobei $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \ldots (i\xi_d)^{\alpha_d}$ bezeichnet.
Wir betrachten das AWP

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

und benutzen die Fourier-Transformation bzgl. x:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_t(\xi) &= F_{x\to\xi}[\Delta u](\xi) = F_{x\to\xi}\left[\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}u\right](\xi) \\
&= \sum_{j=1}^{d} F_{x\to\xi}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}u\right](\xi) = \sum_{j=1}^{d}(-1)^2\,(i\xi_j)^2\,\hat{u}(\xi) \\
&= -\left(\sum_{j=1}^{d}\xi_j^2\right)\hat{u}(\xi) = -\left|\xi\right|^2\hat{u}(\xi).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Funktion $\hat{u}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung in t

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -\left|\xi\right|^2\hat{u}\,,\quad \hat{u}(0) = \hat{u}_0(\xi),$$

und ξ ist nur noch ein Parameter. Die Lösung lautet

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)e^{-|\xi|^2 t}.$$

Die Funktion $e^{-|\xi|^2 t}$ ist die Fourier-Transformation der Funktion

$$u^*(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}},\quad t>0,\, x\in\mathbb{R}^d\,,$$

d. h. $e^{-|\xi|^2 t} = \hat{u}^*(t,\xi)$.
Eine weitere wichtige Eigenschaft der Fourier-Transformation ist die folgende. Sei w mit

$$w(x) = (f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

die sog. Faltung der Funktionen f und g. Es gilt

$$\hat{w}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)e^{i(x,\xi)}dydx = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(z)g(y)e^{i(z+y,\xi)}dydz = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\,.$$

Damit ist u die Faltung der Funktionen u^* und u_0, $u = (u^* * u_0)$

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} u^*(t,x-y)u_0(y)dy = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u_0(y)dy,\quad t>0,\, x\in\mathbb{R}^d.$$

Die Funktion u^* ist die sog. Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung. Es gilt für $t\to 0$

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)\,.$$

Damit ist die Existenz der Lösung des Anfangwertproblems gesichert. Ist die Anfangsbedingung stetig und beschränkt, d. h.

$$u_0 \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^d\right)\,,$$

dann gilt die Stabilität

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathbb{C}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |u(t,x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \right| \|u_0\|_{\mathbb{C}(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|_{\mathbb{C}(\mathbb{R}^d)} \,.$$

Dabei benutzt man die Substitution

$$y = x + \sqrt{2t}\, z, \;\; dy = (2t)^{d/2} dz$$

und erhält

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz = 1\,.$$

Das bedeutet, daß die Lösung u des Anfangswertproblems stabil bezüglich der Anfangsbedingung u_0 ist

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathbb{C}} \le \|u_0\|_{\mathbb{C}} \,.$$

Für $t > 0$ kann man das Integral in der Darstellung von u beliebig oft nach t und x differenzieren, so daß die Funktion u sogar unendlich glatt ist,

$$u \in \mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\right).$$

Diese Eigenschaft gilt unabhängig von der Glattheit der Anfangsbedingung u_0! Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d\,, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

ist durch die doppelte Faltung gegeben

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} u^*(t,x-y)u_0(y)dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^d} u^*(t-s,x-y)f(s,y)dyds\,.$$

5.4 Variationsformulierung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit glattem Rand Γ. Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f\,, & t > 0\,,\; x \in \Omega\,, \\ u(t,x) = 0\,, & t > 0\,,\; x \in \Gamma\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, & x \in \Omega\,. \end{cases}$$

Sei $v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ eine Testfunktion. Dann gilt

$$(u_t, v) = -(\nabla u, \nabla v) + (f, v)$$

wobei

$$(v,w) = \int\limits_{\Omega} v(x)w(x)dx$$

das $\mathbb{L}_2$-Skalarprodukt bezeichnet. Die Variationsformulierung lautet damit: Gesucht ist eine Funktion $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)\,,\ t > 0$, die die Anfangsbedingung $u(0,\cdot) = u_0$ erfüllt und der Variationsgleichung

$$(u_t, v) + a(u,v) = \varphi(v)\,,\ \forall v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

genügt. Dabei ist

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u(t,x)\,,\ \nabla v(x))\,dx$$

die Bilinearform und

$$\varphi(v) = \int\limits_{\Omega} f(t,x)v(x)dx$$

das lineare Funktional. Für $v = u$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
(u_t, u) &= \int\limits_{\Omega} u_t(t,x)u(t,x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(u^2(t,x)\right)_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2\,,\\
a(u,u) &= \|\nabla u(t,\cdot)\|^2\,,\\
\varphi(u) &= (f,u) \le \|f\|\,\|u\| \le c\,\|f\|\,\|\nabla u\| \le \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{c^2}{2}\|f\|^2\,,
\end{aligned}$$

wobei die Poincaré-Ungleichung sowie die Ungleichung

$$ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

benutzt wurden. Damit erhalten wir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \le \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{c^2}{2}\|f\|^2\,,$$

oder

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \le c^2\,\|f\|^2\,.$$

Durch die Integration von 0 bis t ergibt sich

$$\|u(t,\cdot)\|^2 + \int\limits_0^t \|\nabla u(s,\cdot)\|^2\,ds \le \|u_0\|^2 + c^2\int\limits_0^t \|f(s,\cdot)\|^2\,ds$$

die Stabilität der Lösung u bezüglich der Anfangsbedingung u_0 und der rechten Seite f in $\mathbb{L}_2(\Omega)$. Für $v = u_t$ erhalten wir analog

$$\|\nabla u(t,\cdot)\|^2 + \int\limits_0^t \|u_t(s,\cdot)\|^2\,ds \le \|\nabla u_0\|^2 + \int\limits_0^t \|f(s,\cdot)\|^2\,ds$$

und damit die Kontrolle auch über die Zeitableitung.

5.5 Differenzenverfahren

Wir betrachten das Modellproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f\,, & t > 0\,,\ x \in (0,1)\,, \\ u(t,0) = \mu_0(t)\,, & t > 0 \\ u(t,1) = \mu_1(t)\,, & t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x)\,, & x \in (0,1)\,. \end{cases}$$

Die Orts- und Zeitdiskretisierung ist wie folgt

$$\begin{aligned} &x_i = ih\,,\ i = 0,\ldots,n\,,\ h = 1/n\,,\ n \geq 2\,, \\ &t_j = j\tau\,,\ j = 0,1,\ldots\,,\ \tau > 0\,. \end{aligned}$$

Um die Gleichung zu diskretisieren, benutzen wir

a) das explizite Schema $u^j_{t,i} = u^j_{\bar{x}x,i} + \varphi^j_i$, d. h.

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u^j_{i-1} - 2u^j_i + u^j_{i+1}}{h^2} + \varphi^j_i\,, \quad i = 1,\ldots,n-1\,,\ j \geq 0$$

b) das implizite Schema $u^j_{t,i} = u^{j+1}_{\bar{x}x,i} + \varphi^j_i$, d. h.

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u^{j+1}_{i-1} - 2u^{j+1}_i + u^{j+1}_{i+1}}{h^2} + \varphi^j_i\,, \quad i = 1,\ldots,n-1\,,\ j \geq 0$$

c) das Schema mit Gewicht $0 \leq \sigma \leq 1$ mit

$$u^j_{t,i} = \sigma u^{j+1}_{\bar{x}x,i} + (1-\sigma) u^j_{\bar{x}x,i} + \varphi^j_i\,, \quad i = 1,\ldots,n-1\,,\ j \geq 0.$$

Für $i = 0\,,\ i = n$ benutzen wir die Randbedingungen

$$u^j_0 = \mu_0(t_j)\,,\ u^j_n = \mu_1(t_j)\,,\ j = 1,2,\ldots$$

und für $j = 0$ die Anfangsbedingung

$$u^0_i = u_0(x_i)\,,\ i = 0,\ldots,n\,,$$

wobei die Kompatibilitäsbedingungen

$$\lim_{x\to 0} u_0(x) = \lim_{t\to 0} \mu_0(t) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1} u_0(x) = \lim_{t\to 0} \mu_1(t)$$

sinnvoll sind.
Das Schema mit Gewicht beinhaltet das explizite Schema für $\sigma = 0$ und das implizite für $\sigma = 1$. Es gelten die folgenden Approximationseigenschaften, die einfach aus der Taylor-Formel folgen.
Das σ-Schema approximiert die Gleichung mit

a) $O(\tau + h^2)$ für $\sigma \neq 1/2$, $\sigma \neq \sigma^*$, $\varphi_i^j = f(t_j, x_i)$, $u \in \mathbb{C}^{4,2}$;

b) $O(\tau^2 + h^2)$ für $\sigma = 1/2$, $\varphi_i^j = f\left(t_j + \frac{\tau}{2}, x_i\right)$, $u \in \mathbb{C}^{4,3}$;

c) $O(\tau^2 + h^4)$ für $\sigma = \sigma^* = 1/2 - \frac{h^2}{12\tau}$,
$\varphi_i^j = \frac{5}{6} f\left(t_j + \frac{\tau}{2}, x_i\right) + \frac{1}{12}\left(f\left(t_j + \frac{\tau}{2}, x_{i-1}\right) + f\left(t_j + \frac{\tau}{2}, x_{i+1}\right)\right)$, $u \in \mathbb{C}^{6,3}$.

Bei der Stabilitätsuntersuchung nach von Neumann betrachtet man die homogene Gleichung, d. h.

$$\begin{aligned} u_{t,i}^j &= \sigma u_{\bar{x}x,i}^{j+1} + (1-\sigma) u_{\bar{x}x,i}^j, \ i = 1, \ldots, n-1, \ j = 0, 1, \ldots \\ u_0^j &= u_n^j = 0, \ j = 1, \ldots \\ u_i^0 &= u_0(x_i), \ i = 0, \ldots, n. \end{aligned}$$

Der Separationsansatz

$$u_i^j = v_i w^j$$

führt auf

$$v_i \frac{w^{j+1} - w^j}{\tau} = \sigma v_{\bar{x}x,i} w^{j+1} + (1-\sigma) v_{\bar{x}x,i} w^j$$

oder

$$\frac{w^{j+1} - w^j}{\tau\left(\sigma w^{j+1} + (1-\sigma) w^j\right)} = \frac{v_{\bar{x}x,i}}{v_i} = -\lambda = const.$$

Für den Vektor v erhalten wir damit die folgende diskrete Eigenwertaufgabe

$$\begin{cases} v_{\bar{x}x,i} + \lambda v_i = 0, \ i = 1, \ldots, n-1, \\ v_0 = v_n = 0 \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} v_{i-1} + (\lambda h^2 - 2)\, v_i + v_{i+1} = 0, & i = 1, \ldots, n-1, \\ v_0 = v_n = 0. \end{cases}$$

Die nichttrivialen Lösungen dieser Aufgabe sind

$$v_i^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{n}} \sin(\pi k x_i), \quad i = 0, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Es gilt

$$v_0^{(k)} = v_n^{(k)} = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1$$

und

$$\sin \pi k x_{i-1} + \left(\lambda_k h^2 - 2\right) \sin \pi k x_i + \sin \pi k x_{i+1} = \sin \pi k x_i \left(2 \cos \pi k h + \lambda_k h^2 - 2\right) = 0$$

und damit

$$\lambda_k = \frac{2}{h^2}(1 - \cos \pi k h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k h}{2}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Damit ergibt sich für w^j

$$w^{j+1} = q_k w^j \quad \text{mit} \quad q_k = \frac{1-\tau\lambda_k(1-\sigma)}{1+\tau\lambda_k\sigma}\,.$$

Das Verfahren kann nur für $|q_k| \le 1$ stabil sein. Daher ist

$$-1 \le \frac{1-\tau\lambda_k(1-\sigma)}{1+\tau\lambda_k\sigma} \le 1\,, \quad k = 1,\ldots,n-1$$

die Stabilitätsbedingung. Die rechte Ungleichung ist automatisch erfüllt. Die linke gilt, falls

$$-1-\tau\lambda_k\sigma \le 1-\tau\lambda_k(1-\sigma)$$

oder

$$\tau\lambda_k(1-2\sigma) \le 2\,, \quad \sigma \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k}\,, \quad k = 1,\ldots,n-1\,.$$

Der größte Eigenwert ist

$$\lambda_{n-1} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{n-1}{n}\right) \le \frac{4}{h^2}\,.$$

Hieraus ergibt sich eine hinreichende Stabilitätsbedingung

$$\sigma \ge \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}\,.$$

Damit sind das implizite ($\sigma = 1$), das Crank-Nicolson ($\sigma = 1/2$) und das Verfahren mit $\sigma = \sigma^* = 1/2 - \frac{h^2}{12\tau}$ unbedingt stabil. Für $\sigma < \sigma_0$ gibt es nur eine bedingte Stabilität

$$\tau \le \frac{2}{\lambda_k(1-2\sigma)}\,, \quad k = 1,\ldots,n-1$$

oder

$$\tau \le \frac{2}{\frac{4}{h^2}\,(1-2\sigma)} = \frac{h^2}{2(1-2\sigma)}\,.$$

Das explizite Verfahren ($\sigma = 0$) ist damit stabil für $\tau \le h^2/2$.
Die Vektoren $v^{(k)}$, $k = 1,\ldots,n-1$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^{n-1}$. Damit gilt für die Lösung u^j die Zerlegung

$$u^j = \sum_{k=1}^{n-1} w^{j,k} v^{(k)}.$$

Für die Euklidische Norm erhalten wir die Stabilität

$$\begin{aligned}\left\|u^j\right\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{n-1}\left|w^{j,k}\right|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} q_k^2\left|w^{j-1,k}\right|^2 \le \sum_{k=1}^{n-1}\left|w^{j-1,k}\right|^2 \le \cdots \le \\ &\le \sum_{k=1}^{n-1}\left|w^{0,k}\right|^2 = \left\|u^0\right\|_2^2\,, \quad j = 1,2,\ldots\end{aligned}$$

Analog kann die Stabilität bzgl. der rechten Seite in der Form

$$\left\|u^j\right\|_2 \leq \left\|u^0\right\|_2 + \tau \sum_{\ell=0}^{j} \left\|\varphi^\ell\right\|_2$$

gezeigt werden. Aus der Approximation und der Stabilität folgt die Konvergenz.

Die impliziten ($\sigma = 1, 1/2, \sigma^*$) Verfahren führen auf ein tridiagonales Gleichungssystem

$$Ay = f\,, \quad A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}\,, \quad y, f \in \mathbb{R}^{n+1}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \mathbb{O} & & \ddots & \ddots & -b_{n-1} \\ & & & & -a_n & c_n \end{pmatrix}.$$

Dieses System löst man mit der sog. verkürzten Gauß-Elimination. Die Lösung sucht man in der Form

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}\,, \quad i = n-1, \dots, 0$$

mit

$$y_n = \frac{f_n + \beta_n a_n}{c_n - \alpha_n a_n}$$

und

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}\,, \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}$$

sowie

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}\,, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + \beta_i a_i}{c_i - \alpha_i a_i}\,, \quad i = 1, \dots, n-1\,.$$

Die Methode ist durchführbar ($c_i - \alpha_i a_i \neq 0\,, c_0 \neq 0$) und stabil $|\alpha_i| \leq 1$, wenn die Ungleichungen

$$|c_0| \geq |b_0|\,, \quad |c_i| \geq |a_i| + |b_i|\,, \quad i = 1, \dots, n-1\,, \quad |c_n| \geq |a_n|$$

gelten und mindestens eine davon streng ist. Bei dem σ-Schema gilt

$$\begin{aligned} & c_0 = 1\,, \quad b_0 = 0\,, \\ & c_i = 1 + \tfrac{2}{h^2}\sigma\tau\,, \quad a_i = \tfrac{1}{h^2}\sigma\tau\,, \quad b_i = \tfrac{1}{h^2}\sigma\tau\,, \quad i = 1, \dots, n-1\,, \\ & c_n = 1\,, \quad a_n = 0\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Matrix streng diagonaldominant und die Lösung eindeutig. Die Stabilitätsabschätzung in der Maximum-Norm ergibt sich ebenfalls aufgrund der strengen Diagonaldominanz.

Lemma 5.5.1. *Sei* $a_n, b_0 \geq 0$, $a_i\,, b_i\,, c_i > 0$, $i = 1, \ldots, n-1$ *und* $c_0 - b_0 > 0$, $c_i - a_i - b_i > 0$, $c_n - a_n > 0$. *Dann gilt*

$$\|y\|_\infty \leq \|D^{-1}f\|_\infty$$

mit

$$D = \operatorname{diag}\left(c_0 - b_0\,, \quad c_i - a_i - b_i\,, \quad c_n - a_n\right).$$

Beweis. Sei $i: \|y\|_\infty = \max\limits_{0\leq j\leq n} |y_j| = |y_i|$.
Ist $i = 0$, dann gilt

$$c_0\,|y_0| = |f_0 + b_0 y_1| \leq b_0\,|y_1| + |f_0| \leq b_0\,|y_0| + |f_0|\ ,$$

$$|y_0| \leq \frac{1}{c_0 - b_0}\,|f_0| \leq \left\|D^{-1}f\right\|_\infty .$$

Analog gilt für $i = 1, \ldots, n-1$

$$|c_i y_i| = c_i\,|y_i| \leq a_i\,|y_{i-1}| + b_i\,|y_{i+1}| + |f_i| \leq (a_i + b_i)\,|y_i| + |f_i|$$

und damit

$$|y_i| \leq (c_i - a_i - b_i)^{-1}\,|f_i|$$

oder

$$|y_i| = \|y\|_\infty \leq \left\|D^{-1}f\right\|_\infty .$$

Für $i = n$ gilt

$$|y_n| \leq (c_n - a_n)^{-1}\,|f_n|\ , \quad \|y\|_\infty \leq \left\|D^{-1}f\right\|_\infty .$$

$\square$

Für das σ-Schema gilt $D = I$ und

$$f_i^j = \begin{cases} u_i^j + \tau(1-\sigma)u^j_{\bar{x}x,\,i} + \tau\varphi_i^j\,, & i = 1, \ldots, n-1 \\ 0\,, \quad i = 0, n\,. \end{cases}$$

Damit

$$\left\|u^{j+1}\right\|_\infty \leq \left\|f^j\right\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n-1}\left|\left(1 - \frac{2}{h^2}\tau(1-\sigma)\right)u_i^j + \frac{1}{h^2}\tau(1-\sigma)\left(v_i^j + w_i^j\right) + \tau\varphi_i^j\right|$$

mit $v^j = \left(0, u_1^j, \ldots, u_{n-2}\right)^\top\,, \quad w^j = \left(u_2^j, \ldots, u_{n-1}^j, 0\right)^\top$.
Unter den Voraussetzungen

$$1 - \frac{2}{h^2}\tau(1-\sigma) \geq 0\,, \quad 1 - \sigma \geq 0$$

und mit $\|v^j\|_\infty \leq \|u^j\|_\infty$, $\|w^j\|_\infty \leq \|u^j\|_\infty$ erhalten wir die Stabilität

$$\begin{aligned}
\left\|u^{j+1}\right\|_\infty &\leq \left(1 - \frac{2}{h^2}\tau(1-\sigma)\right)\left\|u^j\right\|_\infty + \frac{1}{h^2}\tau(1-\sigma)\left(\left\|u^j\right\|_\infty + \left\|u^j\right\|_\infty\right) + \tau\left\|\varphi^j\right\|_\infty \\
&= \left\|u^j\right\|_\infty + \tau\left\|\varphi^j\right\|_\infty \leq \ldots \\
&\leq \left\|u^0\right\|_\infty + \tau\sum_{\ell=0}^{j}\left\|\varphi^\ell\right\|_\infty .
\end{aligned}$$