Kapitel 6

Elliptische Differentialgleichungen

Die Untersuchung verschiedener stationärer physikalischer Prozesse (Wärmeleitung, Diffusion, Elektrostatik, …) führt gewöhnlich auf elliptische Differentialgleichungen. Die bekannteste Gleichung ist die Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0\,, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d\,.$$

Eine Funktion $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$, die der Laplace-Gleichung genügt, heißt harmonisch.

6.1 Kugel- und Zylinderkoordination

Oft ist die Symmetrie des Problems zu berücksichtigen. In den Kugelkoordinaten gilt ($d = 3$)

$$x = \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}\,, \quad 0 \le \rho < \infty\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad 0 \le \theta \le \pi\,.$$

Für eine harmonische Funktion u gilt

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0\,.$$

Aus den Zylinderkoordinaten $d = 3$

$$x = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ x_3 \end{pmatrix}\,, \quad 0 \le \rho < \infty\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

ergibt sich

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0\,.$$

Ist die Funktion u x_3-unabhängig, so vereinfacht sich die dreidimensionale Laplace-Gleichung zur zweidimensionalen in Polarkoordinaten

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\,.$$

Interessant sind dabei die kugel- bzw. zylindersymmetrischen Lösungen, d. h. Lösungen, die nur von ρ abhängen. In $\mathbb{R}^3$ ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0$$

und damit

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{c_1}{\rho^2}\,,\quad u=-\frac{c_1}{\rho}+c_2\,.$$

Mit $c_1=-\frac{1}{4\pi}$, $c_2=0$ erhalten wir die Fundamentallösung der dreidimensionalen Laplace-Gleichung

$$u^*(x)=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|x|}\,,\quad x\neq 0\,.$$

Analog erhalten wir in $2D$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0$$

und damit

$$u=c_1\ln\rho+c_2\,.$$

Die Fundamentallösung in $\mathbb{R}^2$ ist mit $c_1=-\frac{1}{2\pi}$, $c_2=0$

$$u^*(x)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x|\;,\quad x\neq 0\,.$$

Diese Funktionen spielen in der Theorie und Numerik elliptischer Gleichungen eine große Rolle.

6.2 Kelvin-Transformation

Sei $u:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ eine dreidimensionale harmonische Funktion. Betrachte

$$v(x)=v(\rho',\varphi,\theta)=\rho u(\rho,\varphi,\theta)\,,$$

wobei $\rho\rho'=1$, d. h. $\rho'=\frac{1}{\rho}$ ist (reziproke Radien).
Es gilt

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial\rho^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\rho}&=\frac{\partial}{\partial\rho'}\frac{\partial\rho'}{\partial\rho}=\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)=-\rho'^2\frac{\partial}{\partial\rho'}\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}&=\rho'\frac{\partial}{\partial\rho}\left(-\rho'^2\frac{\partial v}{\partial\rho'}\right)=\rho'^3\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\rho'^2\frac{\partial v}{\partial\rho'}\right)\,.\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)=\rho'^3\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right).$$

Schließlich ergibt sich

$$(\rho')^5\,\Delta_{\rho',\varphi,\theta}v=\Delta_{\rho,\varphi,\theta}u=0.$$

Die Funktion v ist damit harmonisch in ρ',φ,θ -Koordinaten. Sei u harmonisch in $\Omega=\{x:|x|<1\}$. Dann ist v harmonisch in $\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega$ und es gilt

$$\begin{aligned} v(\rho',\varphi,\theta) &= \frac{1}{\rho'}u\left(\frac{1}{\rho'},\varphi,\theta\right), \quad \rho'>1, \\ |v(\rho',\varphi,\theta)| &= O\left(\frac{1}{\rho'}\right), \quad \rho'\to\infty. \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^2$ gilt analog mit

$$v(\rho',\varphi)=u\left(\frac{1}{\rho'},\varphi\right).$$

die Eigenschaft

$$0=\Delta_{\rho,\varphi}u=\rho'^3\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\rho'\frac{\partial v}{\partial\rho'}\right)+\rho'^2\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=\rho'^4\Delta_{\rho',\varphi}v.$$

6.3 Eigenschaften der harmonischen Funktionen

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit Rand $\Gamma=\partial\Omega$. Es gilt für eine Funktion $u\in\mathbb{C}^1\left(\bar\Omega\right)$ die Formel

$$\int\limits_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)dx=\int\limits_\Gamma u n_j\,ds_x, \quad j=1,2,3,$$

wobei $n_x=(n_1,n_2,n_3)^\top$ die äußere Normale an der Stelle $x\in\Gamma$ bezeichnet. Ist $u:\bar\Omega\to\mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, so gilt

$$\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)dx=\int\limits_\Gamma(u_1n_1+u_2n_2+u_3n_3)\,ds_x,$$

oder

$$\int\limits_\Omega\operatorname{div}u\,dx=\int\limits_\Gamma(u,n_x)\,ds_x,$$

der Satz von Gauß.

Seien $u,v\in\mathbb{C}^2\left(\bar\Omega\right)$ zwei skalare Funktionen und $w=\left(u\frac{\partial v}{\partial x_1},u\frac{\partial v}{\partial x_2},u\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^\top$ ein Vektorfeld. Wir erhalten

$$\int\limits_\Omega u\Delta v\,dx=\int\limits_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial n_x}\,ds_x-\int\limits_\Omega(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}v)\,dx,$$

die sog. erste Green'sche Formel. Die zweite Green'sche Formel ist

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n_x} - v\frac{\partial u}{\partial n_x}\right) ds_x \,.$$

Ist u nur im Inneren von Ω gegeben, so benutzt man

$$(\gamma_0 u)\,(x) = \lim_{\tilde{x}\in\Omega;\,\tilde{x}\to x} u\,(\tilde{x})\ , \quad x \in \Gamma \text{ (Dirichlet-Spur)}$$

und

$$(\gamma_1 u)\,(x) = \lim_{\tilde{x}\in\Omega;\,\tilde{x}\to x} (\operatorname{grad} u\,(\tilde{x})\,,\, n_x) \text{ (Neumann-Spur)}$$

und erhält

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_\Gamma ((\gamma_0 u)\,(\gamma_1 v) - (\gamma_0 v)\,(\gamma_1 u))\, ds_x \,.$$

Sei $x \in \Omega$ fixiert und

$$u^*(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\,,$$

die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung bzgl. y. Wegen der Singularität für $x \to y$ können die Green'sche Formeln nicht direkt verwendet werden.

$$\begin{array}{rrcll} \text{Sei} & K_\varepsilon(x) & = & \{y\in\Omega : \ |y-x|\le\varepsilon\} & \text{eine Kugel und} \\ & S_\varepsilon(x) & = & \{y\in\Omega : \ |y-x|=\varepsilon\} & \text{ihr Rand.} \end{array}$$

In $\Omega \setminus K_\varepsilon(x)$ ist die Funktion $u^*(x,y)$ bzgl. y harmonisch und sei $u \in \mathbb{C}^2(\bar{\Omega})$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\setminus K_\varepsilon(x)} (u\Delta u^*(x,\cdot) - u^*(x,\cdot)\Delta u)\, dy \ &= \ \int_\Gamma \left(u\frac{\partial u^*(x,\cdot)}{\partial n_y} - \frac{\partial u}{\partial n_y}u^*(x,\cdot)\right) ds_y \\ &\quad + \int_{S_\varepsilon(x)} \left(u\frac{\partial u^*(x,\cdot)}{\partial n_y} - \frac{\partial u}{\partial n_y}u^*(x,\cdot)\right) ds_y \,. \end{aligned}$$

Für n_y, $y \in S_\varepsilon(x)$ gilt $n_y = \frac{x-y}{|x-y|} = \frac{x-y}{\varepsilon}$ und damit

$$\frac{\partial u^*}{\partial n_y}(x,y) = \left(\operatorname{grad}_y u^*(x,y),\, n_y\right) = \left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|^2}\cdot\frac{-(x-y)}{|x-y|}\,,\,\frac{x-y}{|x-y|}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\,.$$

Aus dem Mittelwertsatz erhalten wir

$$\int_{S_\varepsilon(x)} u\frac{\partial u^*}{\partial n_y}(x,\cdot)ds_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{S_\varepsilon(x)} u(y)ds_y = u(y_1^*)\,, \quad y_1^* \in S_\varepsilon(x)\,.$$

Analog gilt mit $u^*(x,y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,, \quad y \in S_\varepsilon(x)$

$$-\int\limits_{S_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial n_y} u^*(x,\cdot)ds_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_{S_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial n_y}(y)ds_y = -\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n_y}(y_2^*)\,, \quad y_2^* \in S_\varepsilon(x)\,.$$

Geht ε gegen Null, so erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(y_1^*) = u(x)\,, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n_y}(y_2^*)\right) = 0$$

und

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega\setminus K_\varepsilon(x)} u^*(x,\cdot)u\;dy = \int\limits_{\Omega} u^*(x,\cdot)u\;dy$$

nach Definition des uneigentlichen Integrals. Somit erhält man die dritte Green'sche Formel, die sog. Darstellungsformel

$$u(x) = \int\limits_\Gamma u^*(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y)ds_y - \int\limits_\Gamma \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial n_y}u(y)dy - \int\limits_\Omega u^*(x,y)\Delta u(y)dy\,, \quad x \in \Omega\,.$$

Ist u selbst harmonisch ($\Delta u = 0$), so läßt sich ihr Wert $u(x)$, $x \in \Omega$ durch die Werte der Funktion und ihrer Normalableitung auf dem Rand ausdrücken. Da $x \in \Omega$ und $y \in \Gamma$ und daher $y \neq x$ gilt, können die Randintegrale beliebig oft nach x differenziert werden. Deswegen ist jede harmonische Funktion im Inneren des Gebietes Ω unendlich oft differenzierbar.
Außerdem sind die Funktionen

$$\left(\widetilde{V}w\right)(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Gamma \frac{w(y)}{|x-y|}ds_y\,, \quad x \in \Omega$$

und

$$(Wv)(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Gamma \frac{(x-y,\,n_y)}{|x-y|^3}v(y)ds_y\,, \quad x \in \Omega$$

beide harmonisch. Sie werden Einfach- bzw. Doppelschichtpotential genannt. In $\mathbb{R}^2$ gilt Analoges mit $u^*(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$.
Weitere Eigenschaften harmonischer Funktionen sind:

1) Ist v in Ω harmonisch, so gilt

$$\int\limits_S \frac{\partial v}{\partial n_x}\,ds_x = 0$$

für alle $S \subset \Omega$. Diese Eigenschaft folgt aus der ersten Green'schen Formel mit $u \equiv 1$. Daher kann das Neumann-Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, & x \in \Omega\,,\\ (\gamma_1 u) = g\,, & x \in \Gamma \end{cases}$$

nur dann eine Lösung besitzen, wenn

$$\int_\Gamma g(y)ds_y = 0$$

gilt.

2) Sei $x \in \Omega$ und $K_a(x) = \{y \in \Omega : |x - y| \leq a\}$ eine Kugel in Ω mit der Oberfläche $S_a(x)$. Es gilt

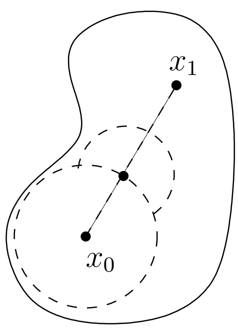
$$u(x) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_a(x)} u(y)ds_y \,.$$

Dieser Mittelwertsatz folgt direkt aus der 3. Green'schen Formel mit

$$u^*(x, y) = \frac{1}{4\pi a}\,, \quad \frac{\partial u^*}{\partial n_y}(x, y) = -\frac{1}{4\pi a^2}\,, \quad y \in S_a(x)$$

und der Eigenschaft 1.

3) (Maximumprinzip). Ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch in Ω und stetig in $\bar{\Omega}$, so ist u entweder konstant oder u nimmt sein Maximum und sein Minimum nur auf der Berandung Γ an.



Sei $x_0 : u_0 = u(x_0) \geq u(x), \forall x \in \Omega$, $x_0 \in \Omega$ und $d = \operatorname{dist}(x_0, \Gamma) > 0$. Es gilt entweder $u(x) \equiv u_0$ oder es existiert ein Punkt $x_1 \in \Omega$ mit $u(x_0) > u(x_1)$. Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$u_0 = \frac{1}{4\pi d^2} \int_{S_d(x_0)} u(y)ds_y \leq \frac{1}{4\pi d^2} \int_{S_d(x_0)} u(x_0)ds_y = u_0 \,.$$

und damit $u(y) = u(x_0) = u_0, \forall y \in S_d(x_0)$. Damit können wir einen Schritt von x_0 in die Richtung x_1 tun, usw.

Folgerung 6.3.1. *Gilt $u \leq v$ auf Γ, dann gilt $u \leq v$ überall im Inneren von Ω.*

Analog folgt aus $|u| \leq v$ auf Γ die Ungleichung $|u| \leq v$, $\forall x \in \bar{\Omega}$.

4) Das Dirichlet-Randwertproblem für eine $u \in \mathbb{C}(\bar{\Omega})$

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, & x \in \Omega\,, \\ u = g\,, & x \in \Gamma \end{cases}$$

ist eindeutig lösbar. Denn die Differenz zweier Lösungen ist harmonisch und erfüllt $u_1 - u_2 = 0$, $x \in \Gamma$. Daher folgt mit dem Maximumprinzip $u_1 - u_2 \equiv 0$. Außerdem ist das Problem stabil, d. h.

$$|u_1 - u_2| \leq \varepsilon\,, \quad x \in \Omega, \quad \text{falls } |g_1 - g_2| \leq \varepsilon \text{ gilt.}$$

Bemerke, daß $v \equiv \varepsilon$ harmonisch ist.

5) Wenn eine harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ in der Umgebung eines isolierten singulären Punktes x_0 langsamer wächst als $\frac{1}{|x-x_0|}$, d. h.

$$|u(x)| \le \varepsilon(|x-x_0|)\frac{1}{|x-x_0|}, \quad \text{mit} \quad \varepsilon(r) \to 0\,, \quad r \to 0\,,$$

dann ist sie in der Umgebung dieses Punktes beschränkt, und der Wert $u(x_0)$ läßt sich so bestimmen, daß u auch im Punkt x_0 harmonisch ist.
In $\mathbb{R}^2$ genügt dafür analog die Bedingung

$$|u(x)| \le \varepsilon(|x-x_0|) \ln \frac{1}{|x-x_0|}$$

6) Eine im unbeschränkten Gebiet $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ harmonische Funktion wird im Unendlichen regulär genannt, wenn für $|x| = r \ge r_0$ gilt

$$|u(x)| \le \frac{c}{r}\,, \quad |\operatorname{grad} u(x)| \le \frac{c}{r^2}\,.$$

Strebt eine harmonische Funktion u für $|x| = r \to \infty$ gleichmäßig gegen Null, d. h.

$$|u(x)| \le \varepsilon(|x|)\,, \quad \varepsilon(r) \to 0\,, \quad r \to \infty\,,$$

so ist sie im Unendlichen regulär. Zum Beweis benutzt man die Kelvin-Transformation.

7) Das äußere Dirichlet-Randwertproblem für ein $u \in \mathbb{C}\,(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ (d. h. auch auf Γ!) lautet

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \\ u = g\,, & x \in \Gamma \\ |u(x)| \le \varepsilon(|x|)\,, & \varepsilon(r) \to 0\,, \quad r \to \infty \end{cases}$$

ist eindeutig lösbar. Die letzte Bedingung ist wichtig. Für $\Omega = K_1(0)$, $g \equiv 1$ lösen zwei Funktionen $u_1 \equiv 1$, $u_2 = 1/|x|$ formal das Randwertproblem. Die Funktion u_1 strebt aber nicht gegen Null. Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen, dann ist $u = u_1 - u_2$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ harmonisch und $u = 0$, $x \in \Gamma$. Es gilt für alle $\varepsilon > 0$, daß

$$|u(x)| \le \varepsilon\,, \quad |x| \ge R(\varepsilon)\,.$$

Dann ist u in $K_{R(\varepsilon)}(0) \setminus \bar{\Omega}$ harmonisch und aufgrund des Maximumprinzips

$$|u(x)| \le \varepsilon\,, \quad \forall x \in K_{R(\varepsilon)}(0) \setminus \bar{\Omega}\,.$$

Da ε willkürlich ist, schließen wir daraus, daß $u = 0$ sowohl in $K_{R(\varepsilon)}(0) \setminus \bar{\Omega}$ als auch im ganzen Gebiet $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ ist. Damit ist das Problem eindeutig lösbar. Im zweidimensionalen Fall lautet die äußere Randwertaufgabe: Finde $u \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}\right)$ mit

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}\,, \\ u = g\,, & x \in \Gamma\,, \\ |u(x)| \le c\,, & \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}\,. \end{cases}$$

Beachte, daß die Funktion $\ln|x|$ für $|x| = r \to \infty$ unbeschränkt ist.

6.4 Trennung der Veränderlichen

Lösung des Dirichlet-Randwertproblems für den Kreis $\Omega = K_a(0)$, hierbei gilt $K_a(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < a\}$. Die Aufgabe lautet

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, & x \in \Omega\,, \\ u = g\,, & x \in \Gamma\,. \end{cases}$$

Die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten lautet

$$\Delta_{\rho,\varphi} u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0\,.$$

Wir machen den Ansatz

$$u(\rho,\varphi) = R(\rho)\phi(\varphi)$$

und erhalten

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)\phi + \frac{1}{\rho^2}\,R\,\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

oder

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)}{R/\rho} = -\frac{\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}}{\phi} = \lambda = const\,.$$

Hieraus erhalten wir für ϕ und R die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} + \lambda\phi = 0$$

und

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0\,.$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich

$$\phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi\,.$$

Für die Lösung u gilt offenbar

$$u(\rho,\varphi) = u(\rho,\varphi+2\pi)$$

und damit verlangen wir

$$\phi(\varphi) = \phi(\varphi+2\pi)\,,$$

d. h. ϕ ist periodisch mit der Periode 2π. Das ist nur möglich, wenn $\sqrt{\lambda} = n$ eine ganze Zahl ist und damit sind

$$\phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\,,\quad n = 0,1,\ldots$$

die Lösungen der ersten Gleichung. Die Lösung der zweiten Gleichung suchen wir in der Form

$$R(\rho) = \rho^\mu$$

und erhalten

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\mu\rho^{\mu-1}\right) = \mu^2\rho^\mu = n^2\rho^\mu\,, \quad \mu = \pm n\,.$$

Daher ist

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}$$

die allgemeine Lösung der zweiten Gleichung. Die Lösung ρ^{-n} ist singulär in $\rho = 0$. Deswegen ist

$$u_n = \rho^n\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right)\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

eine partikuläre Lösung der Laplace-Gleichung. Die Summe

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$$

stellt, falls sie gleichmäßig konvergiert, ebenfalls eine harmonische Funktion dar. Die Koeffizienten A_n und B_n bestimmt man aus der Randbedingung

$$u(a,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}a^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) = g(\varphi)\,.$$

Sei

$$g(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta\,, \quad a_n = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\,d\theta\,, \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta\,d\theta \end{aligned}$$

die Fourier-Reihe der Funktion g. Damit erhalten wir

$$A_0 = \frac{a_0}{2}\,, \quad A_n = \frac{a_n}{a^n}\,, \quad B_n = \frac{b_n}{a^n}\,.$$

Damit lautet die formale Lösung

$$u(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\left(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi\right)\,.$$

Für $\rho < a$ konvergiert die Reihe offenbar gleichmäßig und kann beliebig oft gliedweise differenziert werden. Hierbei wird benutzt, daß die Fourier-Koeffizienten $a_n$und b_n beschränkt sind. Das gilt für jede beschränkte Funktion g, sogar für jede Funktion $g \in \mathbb{L}_1(\Gamma)$. Ist g so glatt, daß ihre Fourier-Reihe konvergiert, dann ist die Reihe in u auch für $\rho = a$ konvergent und die Randbedingung $u(a,\varphi) = g(\varphi)$ ist erfüllt.

Durch Einsetzen der Fourier-Koeffizienten und Vertauschen von Summation und Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} u(\rho,\varphi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(\cos n\theta\cos n\varphi+\sin n\theta\sin n\varphi)\right)d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\theta)\right)d\theta\,. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\theta) &= \frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\left(e^{in(\varphi-\theta)}+e^{-in(\varphi-\theta)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}e^{i(\varphi-\theta)}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}e^{-i(\varphi-\theta)}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\frac{\rho}{a}e^{i(\varphi-\theta)}}{1-\frac{\rho}{a}e^{i(\phi-\theta)}}+\frac{\frac{\rho}{a}e^{-i(\varphi-\theta)}}{1-\frac{\rho}{a}e^{-i(\phi-\theta)}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{\rho^2}{a^2}}{1-2\frac{\rho}{a}\cos(\varphi-\theta)+\frac{\rho^2}{a^2}}\right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} u(\rho,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\frac{1-\frac{\rho^2}{a^2}}{1-2\frac{\rho}{a}\cos(\varphi-\theta)+\frac{\rho^2}{a^2}}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2\rho a\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}d\theta \end{aligned}$$

das Poisson-Integral. Der Kern

$$K(\rho,\varphi,a,\theta)=\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2\rho a\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}\,,\quad \rho<a$$

wird der Poisson-Kern genannt. Für $g\in\mathbb{C}(\Gamma)$ stellt die Funktion

$$u(\rho,\varphi)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta)\,K(\rho,\varphi,a,\theta)\,d\theta & ,\ \rho<a \\ g(\varphi) & ,\ \rho=a \end{cases}$$

die klassische Lösung des Randwertproblems mit $u\in\mathbb{C}^2(\Omega)\cap\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ dar.

6.5 Die Green-Funktion

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Für $u \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^1(\bar{\Omega})$ gilt die Darstellungsformel

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \left(u^*(x,\cdot)\frac{\partial u}{\partial n_y} - \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial n_y} u \right) ds_y - \int\limits_{\Omega} u^*(x,\cdot)\Delta u \, dy$$

mit $u^*(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}$. Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Die zweite Green'sche Formel für u und v lautet dann

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u \, v \, dy = \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n_y} v - u \frac{\partial v}{\partial n_y} \right) ds_y \, .$$

Die Addition beider Gleichungen ergibt

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \left((u^*(x,\cdot) + v) \frac{\partial u}{\partial n_y} - \frac{\partial}{\partial n_y} (u^*(x,\cdot) + v) \, u \right) ds_y - \int\limits_{\Omega} (u^*(x,\cdot) + v) \, \Delta u \, dy \, .$$

Wir wählen jetzt v so, daß für ein fixiertes $x \in \Omega$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \, , & y \in \Omega \\ v = -u^*(x,\cdot) \, , & y \in \Gamma \end{cases}$$

gilt. Mit der Bezeichnung

$$G(x,y) = u^*(x,y) + v(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} + v(y)$$

gilt dann

$$u(x) = -\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(x,\cdot)}{\partial n_y} u(y) ds_y - \int\limits_{\Omega} G(x,\cdot)\Delta u \, dy \, .$$

Löst die Funktion u das Randwertproblem

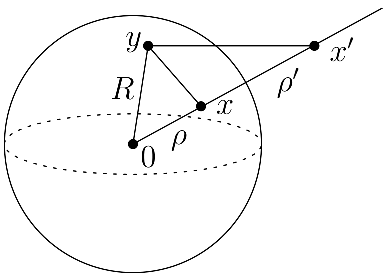
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \, , & y \in \Omega \\ u = g \, , & y \in \Gamma \, , \end{cases}$$

dann gilt

$$u(x) = -\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} g(y) \, ds_y \, .$$

Die Funktion G heißt Green-Funktion des Gebietes Ω. Um sie zu bestimmen, muß man ebenfalls ein Dirichlet-Randwertproblem für die Funktion v (mit $x \in \Omega$ als Parameter) lösen. Für einfache Gebiete (Kugel, Halbraum, Kreis, ...) gelingt das.

Beispiel 6.5.1. *Sei $\Omega = K_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$ eine Kugel in $\mathbb{R}^3$. Sei $x \in \Omega$ und $x = \rho e_x$, $\rho > 0$, $e_x \in S^2$, $x' = \rho' e_x$ mit $\rho\rho' = R^2$ und $y \in \Gamma = \partial\Omega$.*



Die Dreiecke $0xy$ und $0yx'$ sind ähnlich, da sie einen gemeinsamen Winkel bei 0 besitzen und wegen der Längen

$$|0y| = R\,, \quad |0x| = \rho\,, \quad |0x'| = \rho'$$

gilt

$$\frac{|0y|}{|0x|} = \frac{|0x'|}{|0y|} \Longleftrightarrow \frac{R}{\rho} = \frac{\rho'}{R} \Longleftrightarrow \rho\rho' = R^2. \quad \checkmark$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

$$\frac{|x-y|}{|x'-y|} = \frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho'} \tag{6.1}$$

und deswegen

$$|x-y| = \frac{\rho}{R}\,|x'-y|\;, \quad y \in \Gamma\,.$$

Daher nimmt die harmonische Funktion ($x' \notin \bar{\Omega}$!)

$$v(y) = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{R}{\rho}\,\frac{1}{|x'-y|} = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{R}{|x|}\,\frac{1}{\left|\frac{R^2}{|x|}e_x - y\right|}\,, \quad y \in \bar{\Omega}$$

auf der Kugeloberfläche die gleichen Werte an wie die Funktion

$$-\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|x-y|}\,, \quad x \in \Omega\,, \quad y \in \Gamma\,.$$

Die Green-Funktion ist damit

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|x|}\,\frac{1}{\left|\frac{R^2}{|x|}e_x - y\right|}\right).$$

Es gilt $\Delta_y G = 0$ für $y \neq x$ und $G(x,y) = 0$, $y \in \Gamma$. Für die Normalableitung gilt mit $r = |y|$

$$\frac{\partial}{\partial n_y} = \frac{\partial}{\partial r}\,|_{r=R}$$

und deshalb mit $y = r e_y$, $e_y \in S^2$

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{R-(x,e_y)}{|x-y|^3} + \frac{R}{|x|}\,\frac{R - \left(\frac{R^2}{|x|}e_x, e_y\right)}{\left|\frac{R^2}{|x|}e_x - y\right|^3}\right).$$

Mit (6.1) *gilt*

$$\left|\frac{R^2}{|x|}e_x - y\right|^3 = |x' - y|^3 = |x - y|^3 \frac{R^3}{|x|^3}$$

und es ergibt sich

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3}.$$

Folglich ist

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_\Gamma g(y)\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3}\,ds_y$$

die Lösung des Randwertproblems in einer Kugel. Mit

$$x = \rho e_x\,, \quad e_x = \begin{pmatrix} \cos\varphi_x \sin\theta_x \\ \sin\varphi_x \sin\theta_x \\ \cos\theta_x \end{pmatrix}$$

und

$$y = Re_y\,, \quad e_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi_y \sin\theta_y \\ \sin\varphi_y \sin\theta_y \\ \cos\theta_y \end{pmatrix}, \quad ds_y = R^2 \sin\theta_y\, d\theta_y d\varphi_y$$

ergibt sich das Poisson-Integral für die Kugel

$$u(\rho, \varphi_x, \theta_x) = \frac{R}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} g(\varphi_y, \theta_y)\frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 - 2R\rho\alpha + \rho^2)^{3/2}}\sin\theta_y\, d\theta_y d\varphi_y\,,$$
$$\alpha = (e_x, e_y) = \cos\theta_x \cos\theta_y + \sin\theta_x \sin\theta_y \cos(\varphi_x - \varphi_y)\,.$$

Mit der gleichen Methode der reziproken - Radien kann man auch die Green-Funktion eines Kreises bestimmen

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{|x - y|} - \ln\frac{R}{|x|}\frac{1}{\left|\frac{R^2}{|x|}e_x - y\right|}\right).$$

Die Green-Funktion ist positiv für alle $x, y \in \Omega$. Auf dem Rand Γ ist G gleich Null und auf der Oberfläche einer hinreichend kleinen Kugel um x positiv. Daher muß G nach dem Maximum-Prinzip überall positiv sein.
Die Normalableitung $\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) \le 0$ ist nichtpositiv, wie unmittelbar aus der Positivität von G in Ω und $G(x, y) = 0$, $y \in \Gamma$ folgt.
Die Green-Funktion ist bzgl. ihrer Argumente x und y symmetrisch, d. h. es gilt $G(x, y) = G(y, x)$. Das überprüft man wie folgt. $\frac{1}{|x-y|}$ ist offenbar symmetrisch. Für den zweiten Summand erhalten wir (für $G(y, x)$)

$$\frac{R}{|y|}\frac{1}{\left|\frac{R^2}{|y|}e_y - x\right|} = \frac{1}{\left|Re_y - \frac{|y|}{R}x\right|} = \frac{1}{|\tilde{y} - \tilde{x}|}\,, \quad \tilde{y} = Re_y \in \Gamma,\ \tilde{x} = \frac{|y|}{R}x\,.$$

Somit gilt mit (6.1)

$$|\tilde{y}-\tilde{x}| = \frac{|\tilde{x}|}{R}\,|\tilde{y}-\tilde{x}'| = \frac{|y|\,|x|}{R^2}\left|Re_y - \frac{R^3}{|x|\,|y|}e_x\right| = \frac{|x|}{R}\left|y-\frac{R^2}{|x|}e_x\right|$$

und damit die Symmetrie, die einen mathematischen Ausdruck für das physikalische Reziprozitätsprinzip darstellt: Eine im Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ befindliche Quelle hat in einem Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ die gleiche Wirkung wie dieselbe im Punkt y befindliche Quelle im Punkt x.

6.6 Eine Einführung in die Finite Elemente Methode

Die Finite Elemente Methode (FEM) hat sich in den letzten 50 Jahren zu einer der wichtigsten numerischen Methoden für partielle Differentialgleichungen entwickelt. Diese Methode basiert auf der Variationsformulierung des Problems, der Galerkin-Approximation der exakten Lösung durch eine stückweise polynomiale Funktion und der Lösung des resultierenden linearen Gleichungssystems.
Wir betrachten die eindimensionale Aufgabe

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' = f\,, \quad x \in \Omega = (a,b)\,, \\ \tilde{u}(a) = \tilde{g}_a\,, \\ -\tilde{u}'(b) = \alpha_b(\tilde{u}(b) - \tilde{g}_b)\,, \end{cases}$$

wobei f, $\tilde{g}_a$, $\tilde{g}_b$ und $\alpha_b > 0$ gegeben sind. Sei $\mathbb{V} = \{v \in \mathbb{H}^1\left((a,b)\right) :\ v(a) = 0\}$. Mit $u = \tilde{u} - \tilde{g}_a$ wird die Aufgabe zu

$$\begin{cases} -u'' = f\,, \quad x \in \Omega\,, \\ u(a) = 0\,, \\ -u'(b) = \alpha_b(u(b) - g_b)\,, \quad g_b = \tilde{g}_b - \tilde{g}_a\,. \end{cases}$$

Damit ist $\mathbb{V}$ ein passender Funktionenraum. Sei $v \in \mathbb{V}$ eine Testfunktion. Es gilt

$$-\int\limits_a^b u''v\,dx = -u'v\,|_a^b + \int\limits_a^b u'v'\,dx = \alpha_b\left(u(b) - g_b\right)v(b) + \int\limits_a^b u'v'\,dx = \int\limits_a^b fv\,dx\,.$$

Die Variationsformulierung lautet damit:
Finde $u \in \mathbb{V}$ mit

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \ell(v)\,, \quad \forall v \in \mathbb{V}\,, \\ a(u,v) &= \int\limits_a^b u'v'\,dx + \alpha_b u(b)v(b)\,, \quad \ell(v) = \int\limits_a^b fv\,dx + \alpha_b g_b v(b)\,. \end{aligned}$$

Die Bilinearform a ist beschränkt und koerziv

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq c_1 \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}}\,, \quad \forall u,v \in \mathbb{V} \\ a(v,v) &\geq c_2 \|v\|_{\mathbb{V}}^2\,, \quad \forall v \in \mathbb{V}\,. \end{aligned}$$

Wegen der Sobolev-Einbettung $\mathbb{H}^k \subset \mathbb{C}$ für $k > d/2$ können jetzt ($k = 1$, $d = 1$) alle Funktionen stetig angenommen werden. Es gilt

$$v(x) = \int_a^x v'(t)\,dt$$

und damit

$$|v(x)| = \left| \int_a^x 1 \cdot v'(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b (v'(t))^2\,dt \right)^{1/2} = \sqrt{(b-a)}\,\|v'\|\,.$$

Somit erhalten wir

$$\|v\|_\infty = \max_{x\in(a,b)} |v(x)| \leq c\,\|v\|_1$$

oder duch quadrieren und integrieren die Poincaré-Ungleichung (oder Friedrichs-Ungleichung)

$$\|v\| \leq c_F\,\|v'\| \quad \text{mit} \quad c_F = b - a.$$

(*Bemerkung: Anstelle von $v(a) = 0$ kann auch $v(\xi) = 0$ für ein $\xi \in (a,b)$ gefordert werden.*) Die Stetigkeit der Bilinearform folgt aus

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_a^b |v'|\,|u'|\,dx + \alpha_b\,|u(b)|\,|v(b)| \\ &\leq \|v\|_1\,\|u\|_1 + \alpha_b c^2\,\|u\|_1\,\|v\|_1 = \left(1 + \alpha_b c^2\right) \|u\|_1\,\|v\|_1\,. \end{aligned}$$

Die Bilinearform ist koerziv, da

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_a^b (v')^2 dx + \alpha_b (v(b))^2 \geq \int_a^b (v')^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_a^b (v')^2 dx + \frac{1}{2c} \int_a^b v^2 dx \geq \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{c}\right) \|v\|_1^2\,, \end{aligned}$$

wobei die Poincaré-Ungleichung benutzt wurde. Folglich ist die Variationsformulierung, nach dem Theorem von Lax-Milgram, für eine Funktion $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ eindeutig lösbar.

Die Idee der FEM ist eine Näherung $u_h \in \mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$ zu konstruieren, wobei der Unterraum $\mathbb{V}_h$ endlich-dimensional ist. Die Galerkin-Näherung erfüllt die sog. Ersatzaufgabe:

$$\begin{gathered}\text{Finde } u_h \in \mathbb{V}_h \,, \text{so daß} \\ a(u_h, v) = \ell(v)\,, \quad \forall v \in \mathbb{V}_h\,.\end{gathered}$$

Die praktische Lösung der Ersatzaufgabe ist zur Lösung eines linearen Gleichungssystems äquivalent. Sei $n = \dim \mathbb{V}_h$ und $\phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_2)$ eine Basis von $\mathbb{V}_h$, dann gilt

$$u_h = \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi_j = \phi y\,.$$

Zunächst ist die Ersatzaufgabe äquivalent zu

$$a(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Damit erhalten wir

$$a(\phi y, \varphi_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j a(\varphi_j, \varphi_i) = (Ay)_i = b_i = \ell(\varphi_i)\,, \quad i = 1, \ldots, n$$

oder

$$\begin{gathered}Ay = b\,, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}\,, \quad y, b \in \mathbb{R}^n\,, \\ a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)\,, \quad b_i = \ell(\varphi_i)\,, \quad i, j = 1, \ldots, n\,.\end{gathered}$$

Die Matrix $A = A^\top > 0$ ist symmetrisch und positiv definit

$$a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = a(\varphi_i, \varphi_j) = a_{ji}$$

und

$$(Ay, y) = \sum_{i,j} a_{ij} y_i y_j = \sum_{i,j} a(\varphi_j, \varphi_i) y_i y_j = a(\phi y, \phi y) = \int_a^b (u_h')^2\, dx + \alpha_b\, (u_h(b))^2 \geq 0\,.$$

Gilt $(Ay, y) = 0$, dann ist $u_h' \equiv 0$, d. h. $u_h = const$. Wegen der Randbedingung $u_h(0) = 0$ folgt $u_h \equiv 0$ oder $y = 0$.
Die Matrix A nennt man die Steifigkeitsmatrix, den Vektor b den Lastvektor.
Die Bilinearform definiert in $\mathbb{V}$ (und damit in $\mathbb{V}_h$) ein Skalarprodukt. Die zugehörige Norm

$$\|u\|_E = (a(u, u))^{1/2}$$

heißt Energienorm. In $\mathbb{V}_h$ gilt

$$\|u_h\|_E = (a(u_h, u_h))^{1/2} = (Ay, y)^{1/2}\,.$$

Es gilt die Schwarz'sche Ungleichung

$$|a(u_h, v_h)| \leq \|u_h\|_E \|v_h\|_E \ .$$

Die Galerkin Näherung ist optimal bzgl. der energetischen Norm, d. h.

$$\|u - u_h\|_E = \min_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|_E \ .$$

Der Beweis ist wie folgt. Es gilt die fundamentale Orthogonalität

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \,, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \,.$$

Damit erhalten wir wegen $u_h \in \mathbb{V}_h$ für ein $v_h \in \mathbb{V}_h$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_E^2 &= a(u - u_h \,,\, u - u_h) = a(u - u_h \,,\, u - v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h \,,\, u - v_h) \leq \|u - u_h\|_E \|u - v_h\|_E \ . \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - v_h\|_E \ , \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \,.$$

Für die $\mathbb{L}_2$-Norm des Fehlers gilt

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 &= \int_a^b (u - u_h)^2 dx \leq c_F^2 \int_a^b (u' - u_h')^2 dx \\ &\leq c_F^2 \int_a^b (u' - u_h')^2 dx + c_F^2 \alpha_b (u(b) - u_h(b))^2 = c_F^2 \|u - u_h\|_E^2 \ , \end{aligned}$$

oder

$$\|u - u_h\| \leq c_F \|u - u_h\|_E \ .$$

Weiterhin gilt

$$\|u - u_h\|_1^2 \leq \|u - u_h\|^2 + \|u - u_h\|_E^2 \leq \left(c_F^2 + 1\right) \|u - u_h\|_E^2$$

oder

$$\|u - u_h\|_1 \leq \sqrt{c_F^2 + 1}\, \|u - u_h\|_E \ .$$

Daher reicht es aus, die Konvergenz in der energetischen Norm zu untersuchen. Die erste Abschätzung ist oft zu grob. Sei $u \in \mathbb{V}$, so daß $u'' \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ (verallgemeinerte Ableitung). Die Folge der Unterräume $\{\mathbb{V}_h\}$, $n \to \infty$ heißt approximierend, falls

$$\inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|_E \leq \varepsilon_n \|u''\| \quad \text{mit} \quad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0 \,.$$

Satz 6.6.1. *Für die $\mathbb{L}_2$-Norm des Fehlers gilt*

$$\|u - u_h\| \leq \varepsilon_n \|u - u_h\|_E \leq \varepsilon_n^2 \|f\| \ ,$$

wenn die Folge $\{\mathbb{V}_h\}$ approximierend ist.

Beweis. Sei ω die Lösung des folgenden Problems

$$\begin{cases} -\omega'' = u - u_h\,, \quad x \in \Omega = (a,b)\,, \\ \omega(a) = 0\,, \\ -\omega'(b) = \alpha_b \omega(b)\,. \end{cases}$$

Für die $\mathbb{L}_2$-Norm des Fehlers gilt

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 &= (u - u_h\,,\, u - u_h) = -\,(u - u_h\,,\, w'') \\ &= -(u(x) - u_h(x))w'(x)|_a^b + \int_a^b (u' - u_h')\, w' dx \\ &= (u(b) - u_h(b))\,\alpha_b w(b) + \int_a^b (u' - u_h')\, w' dx = a\,(u - u_h\,, w) \\ &= a\,(u - u_h\,,\, w - v_h)\,, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h\,. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\|u - u_h\|^2 \le \|u - u_h\|_E \,\|w - v_h\|_E\,, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h$$

und

$$\|u - u_h\| \le \|u - u_h\|_E \frac{\|w - v_h\|_E}{\|u - u_h\|} = \|u - u_h\|_E \frac{\|w - v_h\|_E}{\|w''\|}\,.$$

Da $v_h \in \mathbb{V}_h$ willkürlich ist, gilt

$$\|u - u_h\| \le \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \frac{\|w - v_h\|_E}{\|w''\|} \|u - u_h\|_E \le \varepsilon_n \|u - u_h\|_E \le \varepsilon_n^2 \|f\|\,.$$

□

Damit ist die Konvergenz in der $\mathbb{L}_2$-Norm „schneller" als in der energetischen Norm. Es bleiben noch die folgenden Dinge zu klären

1) die Wahl der Unterräume $\mathbb{V}_h$;

2) die Wahl einer günstigen Basis in $\mathbb{V}_h$;

3) Untersuchung der Approximation in $\mathbb{V}_h$ der Form

$$\inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|w - v_h\| \le \varepsilon_n \|w''\|\,, \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Daraus folgt dann die Konvergenz mit $u \in \mathbb{V}$

$$\|u - u_h\|_1 \le \varepsilon_n \|f\| \;\text{ oder }\; \|u - u_h\| \le \varepsilon_n^2 \|f\|\,, \quad u'' \in \mathbb{L}_2(\Omega)\,.$$

Sehr populär ist die Finite Elemente Methode mit stückweise linearen Ansatzfunktionen. Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Diskretisierung des Intervalls $[a,b]$ in

n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$. $\mathbb{V}_h$ sei die Menge aller stückweise linearen Funktionen bzgl. der Zerlegung mit $u_h(a) = 0$. Es gilt

$$u_h \in \mathbb{C}([a, b]), \quad u_h(x) = a_i x + b_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Als eine Basis in $\mathbb{V}_h$ wählen wir Funktionen $\varphi_j \in \mathbb{V}_h$ mit $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$, $i = 0, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, n$. $\phi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ ist offenbar eine Basis in $\mathbb{V}_h$. Sei $v \in \mathbb{C}([a, b])$. Die Funktion $v_I \in \mathbb{V}_h$,

$$v_I(x) = \sum_{j=1}^{n} v(x_j)\varphi_j(x)$$

heißt die interpolierende Funktion. Es gilt

$$v_I(x_i) = v(x_i), \quad i = 0, \cdots, n \quad (v(a) = 0\,!).$$

Satz 6.6.2. *Die Folge der Unterräume $\{\mathbb{V}_h\}$ sei approximierend für $h \to 0$, wobei*

$$h = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

Dann gilt

$$\inf_{u_h \in \mathbb{V}_h} \|u - u_h\|_E \le \|u - u_I\|_E \le ch\,\|u''\|, \quad \forall\, u \in \mathbb{V} : u'' \in \mathbb{L}_2(\Omega),$$

wobei c nicht von u, h oder u_h abhängig ist.

Beweis. Die erste Ungleichung ist trivial. Weiterhin gilt die Friedrichs-Ungleichung für $(u - u_I)'$ auf (x_{i-1}, x_i)

$$\left(\left.\begin{array}{rcl} u_I(x_{i-1}) & = & u(x_{i-1}) \\ u_I(x_i) & = & u(x_i) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi : (u - u_I)'(\xi) = 0 \right)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left((u - u_I)'\right)^2 dx \le c_{F,i}^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left((u - u_I)''\right)^2 dx = c_{F,i}^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u'')^2\, dx.$$

Damit ist

$$\int_a^b \left((u - u_I)'\right)^2 dx \le c_F^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u'')^2\, dx = c_F^2\, \|u''\|^2$$

mit $c_F = \max\limits_{1 \le i \le n} c_{F,i} = h$. Es gilt auch $u(b) = u_I(b)$ und schließlich

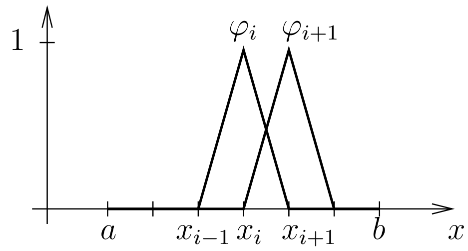
$$\|u - u_I\|_E^2 = a\,(u - u_I\,,\, u - u_I) = \int_a^b \left((u - u_I)'\right)^2 dx + \alpha_b\,(u(b) - u_I(b))^2 \le h^2\,\|u''\|^2.$$

Der Satz ist bewiesen mit $c = 1$. □

Für die Ansatzfunktion gilt

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0\,, \quad a \le x \le x_{i-1}\,, \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\,, \quad x_{i-1} \le x \le x_i\,, \\ -\frac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}\,, \quad x_i \le x \le x_{i+1}\,, \quad i = 1,\cdots,n-1\,, \\ 0\,, \quad x_{i+1} \le x \le b\,, \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, \quad a \le x \le x_{n-1}\,, \\ \frac{x-x_{n-1}}{b-x_{n-1}}\,, \quad x_{n-1} \le x \le b\,. \end{cases}$$



Die Steifigkeitsmatrix A mit

$$a_{ij} \;=\; \int\limits_a^b \varphi_j'\varphi_i' dx + \alpha_b \varphi_j(b)\varphi_i(b)\,, \quad i,j = 1,\cdots,n,$$

oder

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i}\left(-\frac{1}{h_i}\right) dx = -\frac{1}{h_i}\,, \quad i = 2,\cdots,n, \\ a_{ii} &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i^2} dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_{i+1}^2} dx = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\,, \quad i = 1,\cdots,n-1, \\ a_{nn} &= \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{1}{h_n^2} dx + \alpha_b = \frac{1}{h_n} + \alpha_b\,, \\ a_{i,i+1} &= \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h_{i+1}}\right) \frac{1}{h_{i+1}} dx = -\frac{1}{h_{i+1}}\,, \quad i = 1,\cdots,n-1 \end{aligned}$$

ist tridiagonal und stark diagonaldominant für $i = 1, n$. Damit kann das Gleichungssystem

$$Ay = b$$

stabil mit der verkürzten Gauß-Elimination gelöst werden. Für die numerische Lösung u_h gilt dann die Konvergenz

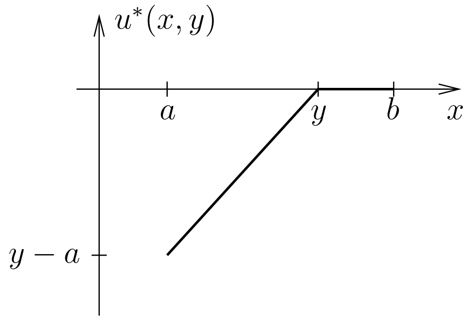
$$\|u - u_h\|_1 \le h\,\|f\|\;, \quad \|u - u_h\| \le h^2\,\|f\|\;.$$

Da sowohl u als auch u_h stetig sind, ist es möglich, die Konvergenz in der Maximum-Norm zu beweisen. Dazu wird die Green-Funktion der Aufgabe

$$u^*(x,y) = \begin{cases} x - y, & x \le y \\ 0, & x > y \end{cases}$$

betrachtet. Es gilt

$$u^*(b,y) = 0\,, \quad (u^*)'(x,y) = \begin{cases} 1\,, & x \le y \\ 0\,, & x > y\,. \end{cases}$$



Sei $v \in \mathbb{V}$ mit v'' stetig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
a(v, u^*(\cdot, y)) &= \int\limits_a^b v'(u^*)'(\cdot, y)dx + \alpha_b v(b) u^*(b,y) \\
&= \int\limits_a^{y-\varepsilon} v'(u^*)'dx + \int\limits_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} v'(u^*)'dx + \int\limits_{y+\varepsilon}^{b} v'(u^*)'dx \\
&= v(u^*)'|_a^{y-\varepsilon} - \int\limits_a^{y-\varepsilon} v(u^*)''dx + v'u^*|_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} - \int\limits_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} v''u^*dx \\
&\quad + v(u^*)'|_{y+\varepsilon}^{b} - \int\limits_{y+\varepsilon}^{b} v(u^*)''dx \\
&= v(y-\varepsilon) + v'u^*|_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} + v''(\xi)u^*(\xi)2\varepsilon \\
&= v(y-\varepsilon) + \varepsilon v'(y-\varepsilon) + 2\varepsilon v''(\xi)u^*(\xi)\,.
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ ergibt sich

$$a(v, u^*(\cdot, y)) = v(y)\,.$$

Satz 6.6.3. *Ist u'' stetig, so gilt für den FEM-Fehler*

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{C}} \le ch^2 \, \|f\|_{\mathbb{C}}\,.$$

Beweis. Der Fehler $u - u_h$ erfüllt $(u - u_h)'' = u''$, ist stetig und damit

$$(u - u_h)(y) = a(u - u_h, u^*(\cdot, y)) .$$

Für $y = x_i$, $i = 1, \ldots, n$ gilt $u^*(\cdot, x_i) \in \mathbb{V}_h$ und damit

$$(u - u_h)(x_i) = 0 , \quad i = 1, \ldots, n , (\text{ d. h. } u_h \equiv u_I) .$$

Damit gilt

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{C}} = |(u - u_h)(y)| , \quad y \in (x_{i-1}, x_i).$$

Es existiert $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ mit $(u - u_h)'(\xi) = 0$, somit folgt

$$\begin{aligned} |(u - u_h)(y)| &\leq \left| \int\limits_{x_{i-1}}^{y} (u - u_h)' dx \right| = \left| \int\limits_{x_{i-1}}^{y} \int\limits_{\xi}^{x} (u - u_h)''(z)\, dz dx \right| \\ &\leq \int\limits_{x_{i-1}}^{y} \int\limits_{\xi}^{x} |u''(z)|\, dz dx \leq \|u''\|_{\mathbb{C}} \frac{1}{2} (x - \xi)^2 |_{x_{i-1}}^{y} \\ &\leq \frac{1}{2} h^2 \, \|u''\|_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2} h^2 \, \|f\|_{\mathbb{C}} . \end{aligned}$$

□