Die erste Regel, an die man sich in der Mathematik halten muss, ist, exakt zu sein. Die zweite Regel ist, klar und deutlich zu sein und nach Möglichkeit einfach.
Lazare Carnot
(1753–1823,
französischer Mathematiker und Politiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

Klausur zur Vorlesung

Einführung in die Numerik

im WS 2019/2020

Freitag, der 21.02.2020.

Aufgabe 1. (4 + 1 = 5 Punkte)

Betrachten Sie die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Blockmatrix

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & I \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6},$$

wobei $I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Einheitsmatrix ist.

(a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A_1 mittels Householder-Spiegelungen und die QR-Zerlegung von A_2 mittels Givens-Rotationen. Geben Sie alle Householder- und Givens-Matrizen an.

(b) Leiten Sie aus den QR-Zerlegungen $A_i = Q_i R_i$ eine QR-Zerlegung für die Matrix B her.

Aufgabe 2. (4 + 1 = 5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

mit $0 < \varepsilon \ll 1$.

(b) Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2, \quad b \in \mathbb{R}^3.$$

und die dazugehörige Normalengleichung

$$A^\top A x = A^\top b.$$

Begründen Sie anhand der Konditionszahl κ_2 der Matrix $A^\top A$, warum das direkte Lösen der Normalengleichung vermieden werden sollte.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

unter Verwendung der Methode der konjugierten Gradienten. Wählen Sie als Startvektor $x_0 = (0, 0, 0)^\top$. Warum konvergiert das Verfahren bereits im zweiten Schritt?

Aufgabe 4. (2.5 + 2.5 = 5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie mittels Newton-Interpolation das Interpolationspolynom zu folgender Tabelle

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	1	1	2	1	1

in der Form $\sum_{i=0}^{4} a_i x^i$.

(b) Bestimmen Sie zu folgender Tabelle

x_k	0	1	3	6
f_k	8	-3	-9	18

die zugehörige natürliche kubische Splinefunktion in der Form

$$S_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k, \quad k = 0, 1, 2.$$

Aufgabe 5. (1.5 + 2 + 1.5 = 5 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch

$$F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ \frac{1}{2}(1 - x^\top x) \end{pmatrix},$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Offensichtlich ist x_* ein Eigenvektor mit $\|x_*\| = 1$ zum Eigenwert λ_* von A genau dann, wenn (x_*, λ_*) eine Nullstelle von F ist.

(a) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Lösung der Gleichung $F(x_*, \lambda_*) = 0$.

(b) Vergleichen Sie dieses Verfahren mit dem Verfahren der inversen Iteration.

(c) Zeigen Sie: Wird das Newton-Verfahren aus (a) um die Normalisierung

$$x_{k+1} = \frac{x_k + \Delta x_k}{\|x_k + \Delta x_k\|}$$

erweitert, so erfüllt die neue Näherung $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda_k$ an den Eigenwert die Gleichung

$$\lambda_{k+1} = \frac{x_k^\top A x_{k+1}}{x_k^\top x_{k+1}}.$$

Aufgabe 6. (4 + 1 = 5 Punkte)
Betrachten Sie das bestimmte Integral

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{mit } f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Der Integrand ist in $x = 0$ nicht differenzierbar, d.h., die Behandlung durch Quadraturformeln aus der Vorlesung erfordert gewisse Modifikationen.

(a) Sei $0 < \delta < 1$. Zur numerischen Berechnung von $I(f)$ soll die zusammengesetzte Trapezregel $T(f)$ auf dem Intervall $[\delta, 1]$ an den Stützstellen $x_j = \delta + jh$, $j = 0, \ldots, n$, mit Schrittweite $h = (1-\delta)/n$ verwendet werden. Zeigen Sie die Abschätzung

$$|I(f) - T(f)| \leq \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{h^2}{12\delta^3}.$$

Hinweis: Für $g \in C^2[a, b]$ gilt für den Quadraturfehler von $T(g)$ auf $[a, b]$:

$$\left| \int_a^b g(x)\,dx - T(g) \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |g''(x)|.$$

(b) Bestimmen Sie mit (a) für feste $\delta, \varepsilon > 0$ ein passendes n, sodass der absolute Fehler $|I(f) - T(f)|$ kleiner als ε wird.