Die erste Regel, an die man sich in der Mathematik halten muß, ist, exakt zu sein. Die zweite Regel ist, klar und deutlich zu sein und nach Möglichkeit einfach.
Lazare Carnot (1753–1823, französischer Offizier und Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

Probeklausur zur Vorlesung

Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Keine Abgabe.

Aufgabe 1. (3.5 + 0.5 + 1 = 5 Punkte)
Betrachten Sie die Matrix

$$A(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4+2\delta \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & 0 & 2+\delta \\ -2 & 3 & 3 & -5+2\delta \end{pmatrix}, \quad \delta \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von $A(\delta)$ unter Verwendung von Householder-Spiegelungen. Geben Sie alle Householder-Matrizen an.

(b) Für welche $\delta \in \mathbb{R}$ ist $A(\delta)$ regulär?

(c) Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $A(\delta)x = b$ mit

$$b = (-3-2\delta, -3, -\delta, 3-2\delta)^\top.$$

Aufgabe 2. (3 + 2 = 5 Punkte)

(a) Gegeben seien die Matrix

$$A(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta \end{pmatrix}, \quad \delta > 0,$$

und die zwei rechten Seiten

$$b_1 = (1,1)^\top, b_2 = (-1,1)^\top.$$

(i) Berechnen Sie die relative Konditionszahl $\kappa_\infty(A(\delta))$ in der Zeilensummennorm für $\delta > 0$. Für welche $\delta > 0$ ist die Matrix schlecht konditioniert?

(ii) Berechnen Sie die exakten Lösungen x_i der Gleichungssysteme $A(\delta)x_i = b_i$, $i = 1, 2$, für $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$.

(iii) Aufgrund von Rundungsfehlern wird $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ als $\tilde{\delta} = 10^{-3}$ abgespeichert. Bestimmen Sie die gestörten Lösungen $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, und berechnen Sie die relativen Fehler in der Maximumsnorm.

(b) Bestimmen Sie die absolute und die relative Konditionszahl κ_{abs} und κ_{rel} des Problems, das bestimmte Integral einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zu berechnen:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Verwenden Sie dazu die L^1-Norm auf dem Intervall, die definiert ist durch

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Aufgabe 3. (2 + 2 + 1 = 5 Punkte)
Sei für $0 < \delta < 1$

$$A(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Das lineare Gleichungssystem $A(\delta)x = b$ soll iterativ mit dem Jacobi-Verfahren gelöst werden.

(a) Formulieren Sie das Jacobi-Verfahren zur Lösung dieses Systems und begründen Sie, warum die Iterierten x_k für $k \to \infty$ gegen die exakte Lösung x^* konvergieren.

(b) Sei $z_k = x_k - x^*$ der Fehler der k-ten Iterierten. Beweisen Sie, dass für den Fehler des Jacobi-Verfahrens aus (a) mit beliebigem Startvektor x_0 und beliebiger Vektornorm $\|\cdot\|$

$$\|z_{2k}\| = \delta^{2k}\|z_0\| \quad \text{für alle } k = 0, 1, \ldots$$

gilt.

(c) Das System $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

soll mit dem Jacobi-Verfahren näherungsweise gelöst werden. Wieviele Iterationen sind nötig, damit der Fehler der Abschätzung

$$\|z_k\| \leq 10^{-2}\|z_0\|$$

genügt?

Aufgabe 4. (4 + 1 = 5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Lösung x_* des Minimierungsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2, \quad b = (9, 0, 18)^\top,$$

mithilfe der pseudoinversen Matrix A^+.

Aufgabe 5. (2.5 + 2.5 = 5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den periodischen kubischen interpolierenden Spline zur folgenden Wertetabelle:

x_k	0	1	2	3
f_k	-1	0	1	-1

(b) Bestimmen Sie das Hermite-Interpolationspolynom zur folgenden Tabelle:

x_k	-1	0	1
$f(x_k)$	-2	1	0
$f'(x_k)$		0	
$f''(x_k)$		4	

Aufgabe 6. (1.5 + 2 + 1.5 = 5 Punkte)
Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft

$$|f(x)| \leq \alpha e^{-\beta x} \quad \text{für } x \geq M \tag{1}$$

mit $M \geq 0$ und $\alpha, \beta > 0$. Zur numerischen Berechnung von

$$I(f) = \int_0^\infty f(x)\, dx$$

soll die summierte Trapezregel $T_n(f)$ auf einem endlichen Intervall $[0, X]$ an den Stützstellen $x_j = jh$ mit $j = 0, \dots, n$ und $h = X/n$ verwendet werden:

$$T_n(f) = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(x_n)\right) \approx I(f).$$

(a) Bestimmen Sie mithilfe von (1) für $X \geq M$ eine von X abhängige obere Schranke für

$$\int_X^\infty |f(x)|\, dx\,.$$

(b) Sei eine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zeigen Sie, dass

$$X(\varepsilon) = \max\left(-\beta^{-1}\ln\left(\frac{\beta\varepsilon}{2\alpha}\right), M\right)$$

die Abschätzung

$$\int_{X(\varepsilon)}^\infty |f(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt. Bestimmen Sie für dieses $X(\varepsilon)$ die Mindestanzahl $n(\varepsilon)$ der äquidistanten Stützstellen, sodass

$$\left|\int_0^{X(\varepsilon)} f(x)\, dx - T_{n(\varepsilon)}(f)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt und zeigen Sie damit die Fehlerabschätzung $|I(f) - T_{n(\varepsilon)}(f)| \leq \varepsilon$.

Hinweis: Verwenden Sie die Abschätzung

$$\left|\int_0^X f(x)\, dx - T_n(f)\right| \leq \frac{X}{12}h^2 \max_{x\in[0,X]} |f''(x)|.$$

(c) Wie müssen $X(\varepsilon)$ und $n(\varepsilon)$ gewählt werden, um auf diese Weise das Integral

$$\int_0^\infty \sin(x)\, e^{-x}\, dx$$

mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-2}$ zu approximieren?