

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.

Bertrand Russell

(1872-1970, britischer Philosoph)



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

Vorbereitungsblatt zur Vorlesung Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Keine Abgabe.

Bitte melden Sie sich bis Montag, den **21. Oktober 2019**,
per E-Mail an seibel@num.uni-sb.de für die Übungen an.

Aufgabe 0.1. (0 Punkte)

Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Vektornorm auf \mathbb{R}^n , wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Definitheit: $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- Homogenität: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Zeigen Sie, dass durch

- (a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- (b) $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$,
- (c) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$,

Vektornormen auf \mathbb{R}^n definiert werden, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$.

Aufgabe 0.2. (0 Punkte)

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ mit $i < j$. Eine Matrix heißt obere Dreiecksmatrix, wenn ihre Transponierte eine untere Dreiecksmatrix ist.

- (a) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen wieder eine untere Dreiecksmatrix ist.
- (b) Woran erkennt man, dass eine Dreiecksmatrix invertierbar ist? Welche Gestalt hat die Inverse einer regulären unteren Dreiecksmatrix?

Aufgabe 0.3. (0 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{r \times s}$ Matrizen. Das Kronecker-Produkt der Matrizen A und B ist definiert als

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mr \times ns}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$, sofern die auftretenden Matrizenprodukte definiert sind.
 (b) Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ gilt

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B),$$

wobei $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$ die Spur von $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ist.

- (c) Zeigen Sie: Die Determinante erfüllt für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n.$$

Ferner ist für reguläre Matrizen A und B auch $A \otimes B$ regulär mit der Inversen

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Aufgabe 0.4. (0 Punkte)

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und x_0 ein Punkt im Abschluss von I . Die Definition des Landau-Symbols \mathcal{O} lautet:

$$“f = \mathcal{O}(g) \text{ für } x \rightarrow x_0“ \Leftrightarrow \exists C, \delta > 0 : \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < C.$$

- (a) Zeigen Sie für $x \rightarrow x_0$:
- (i) Aus $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ und $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$ folgt $f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$.
 (ii) Aus $f = \mathcal{O}(g)$ und $g = \mathcal{O}(h)$ folgt $f = \mathcal{O}(h)$.
- (b) Zeigen Sie: Für $x \rightarrow 0$ ist $\sin = \mathcal{O}(x)$.