

Mache die Dinge so einfach wie möglich - aber nicht einfacher.

Albert Einstein

(1879-1955, deutscher Physiker)



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

1. Übungsblatt zur Vorlesung Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Abgabe: Donnerstag, den 31.10.2019, um 14:00 Uhr.

Aufgabe 1.1. (3 + 1 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die LR -Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 24 & 10 \\ 6 & 11 & 31 & 14 \\ 0 & 8 & 79 & 57 \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante.

- (b) Lösen Sie unter Verwendung der LR -Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (41, 228, 299, 754)^T$.

Aufgabe 1.2. (1 + 3 Punkte)

- (a) Betrachten Sie die Aufgabenstellung, zu einer reellen Zahl $x > 0$ ihre Quadratwurzel \sqrt{x} zu berechnen und zeigen Sie, dass für die relative Konditionszahl gilt

$$\kappa_{\text{rel}} \leq 1/2.$$

- (b) Zur Berechnung von $d = x^2 - y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$, bieten sich die beiden folgenden Algorithmen an:

Algorithmus 1: $a_1 = x \odot x$, $b_1 = y \odot y$, $d_1 = a_1 \oplus (-b_1)$.

Algorithmus 2: $a_2 = x \oplus y$, $b_2 = x \oplus (-y)$, $d_2 = a_2 \odot b_2$.

Dabei bezeichnen \odot und \oplus die Gleitpunktmultiplikation bzw. -addition, deren Resultate um relative Rundungsfehler $|\epsilon| \leq \eta$ abweichen, zum Beispiel

$$x \odot y = xy(1 + \epsilon),$$

wobei ϵ von x und y abhängt. Bestimmen Sie jeweils den Einfluss aller Rundungsfehler $|d_i - d|$, $i = 1, 2$, und geben Sie an, für welche $x, y \in \mathbb{R}$ Algorithmus 2 vorzuziehen ist.

Hinweis: Bei der Fehlerbetrachtung können Sie Fehlerterme höherer Ordnung, d.h. Produkte von relativen Rundungsfehlern vernachlässigen.

Aufgabe 1.3. (1 + 3 Punkte)

- (a) Sei $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, d.h. es gilt $M = M^T$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von M reell sind.
- (b) Eine symmetrische Matrix M heißt positiv definit, falls für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$\langle Mx, x \rangle > 0.$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^n . Zeigen Sie:

- (a) Alle Eigenwerte von M sind positiv.
(b) $m_{ii} > 0$ für $i = 1, \dots, n$.
(c) $\det(M) > 0$.

Aufgabe 1.4. (2 + 2 Punkte)

Im Rahmen der Vorlesung wurde gezeigt, dass für streng reguläre Matrizen eine LR-Zerlegung existiert, d.h. die Gauß-Elimination ist ohne Zeilen- und Spaltenvertauschung durchführbar. Eine weitere Klasse solcher Matrizen soll im Folgenden untersucht werden.

- (a) Seien Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben, so dass $k, l \in \{1, \dots, n\}, k \neq l$ existieren mit

$$|a_k| \geq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_j| \quad \text{und} \quad |b_l| \geq \sum_{j=1, j \neq l}^n |b_j|$$

wobei $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ und $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ und $a_k \neq 0$. Der Vektor $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ werde durch $c_j = b_j - (b_k a_j)/a_k$ definiert. Man zeige, dass

$$|c_l| \geq \sum_{j=1, j \neq l}^n |c_j|.$$

- (b) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine schwach diagonaldominante Matrix, d.h. es gilt für $i = 1, \dots, n$, dass

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

Zeigen Sie, dass man auch bei einer regulären, schwach diagonaldominanten Matrix den Gauß-Algorithmus ohne Spalten- und Zeilenvertauschung ausführen kann.

Hinweis: Induktion über n .