Die Mathematik ist eine Mausefalle. Wer einmal in dieser Falle gefangen sitzt, findet selten den Ausgang, der zurück in seinen vormathematischen Seelenzustand leitet.
Egmont Colerus
(1888-1939, österreichischer Schriftsteller)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Abgabe: Donnerstag, den 07.11.2019, um 14:00 Uhr.

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & -7 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

ist nicht streng regulär und die Gauß-Elimination ohne Pivotsuche scheitert. Bestimmen Sie durch Spaltenpivotsuche eine Zerlegung $PA = LR$ und lösen Sie damit das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (1, 1, 6, -3)^\top \in \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2.2. (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)
Die k-te Frobeniusmatrix L_k bei der Gaußelimination läßt sich darstellen als

$$L_k = I - l_k e_k^\top, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Dabei ist $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix, $e_k \in \mathbb{R}^n$ der k-te Standardeinheitsvektor und die ersten k Einträge des Vektors $l_k \in \mathbb{R}^n$ sind 0.

(a) Zeigen Sie, dass $L_k^{-1} = I + l_k e_k^\top$ gilt.

(b) Für $1 \le \mu, \nu \le n$ bezeichne $P^{(\mu\nu)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Permutationsmatrix mit Einträgen

$$P_{ij}^{(\mu\nu)} = \begin{cases} 1, & i = j \neq \mu, \nu, \text{ oder } i = \mu, j = \nu \text{ oder } i = \nu, j = \mu, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Was bewirkt Rechts bzw. Linksmultiplikation von $P^{(\mu\nu)}$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$? Wie sieht die Inverse von $P^{(\mu\nu)}$ aus? Zeigen Sie, dass $\forall \mu, \nu > k$ gilt

$$P^{(\mu\nu)} L_k P^{(\mu\nu)} = I - (P^{(\mu\nu)} l_k) e_k^\top.$$

(c) Bei der LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche lautet der k-te Schritt

$$A^{(k-1)} \to A^{(k)} = L_k P^{(k\nu_k)} A^{(k-1)}, \quad \nu_k \ge k,$$

wobei $A^{(0)} = A$. Stellen Sie für die Zerlegung $PA = LR$ die Permutationsmatrix P und die linke obere Dreiecksmatrix L durch die Matrizen L_k und $P^{(k\nu_k)}$ dar.

Aufgabe 2.3. (2 + 2 = 4 Punkte)
Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), wird Matrixnorm genannt, wenn sie die üblichen Normeigenschaften besitzt:

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\| \,, \ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \,.$$

(a) Sei $\|\cdot\|_V$ eine beliebige Vektornorm auf $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie, dass durch

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} = \sup_{x\in\mathbb{K}^n:\|x\|_V=1} \|Ax\|_V \,, \quad A \in \mathbb{K}^{n\times n},$$

eine Matrixnorm definiert wird und dass für quadratische Matrizen jede zugeordnete Matrixnorm submultiplikativ ist, d.h.

$$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n} : \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \,.$$

(b) Bestimmen sie zu den folgenden zwei Vektornormen die zugehörigen Matrixnormen:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \,.$$

Aufgabe 2.4. (4 Punkte) Programmieraufgabe
In dieser Aufgabe soll die LR-Zerlegung für streng reguläre Matrizen implementiert und anschließend ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$ gelöst werden. Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie ein Grundgerüst für Ihr Programm. Sie kompilieren Ihr Programm mit

```
cc main.c LR.c basic_LinAlg.c -lm
```

(a) Vervollständigen Sie die Routinen zur LR-Zerlegung aus der Datei `LR.c`. Die ursprüngliche Matrix soll dabei durch L und R überschrieben werden. Die Einsen auf der Diagonale von L werden nicht gespeichert.

(b) Testen Sie nun in `main.c` Ihre Implementierung. In den Dateien `A_ascii.dat` und `b_ascii.dat` finden Sie ein Testbeispiel, das Sie mittels der Routinen aus `basic_LinAlg.c` auslesen können.

Info: Praktische Aufgaben
Sie können die praktischen Aufgaben in Gruppen von bis zu vier Personen bearbeiten. Die Aufgaben müssen in C programmiert werden. Schicken Sie den Quelltext bis zum Abgabetermin am 07.11.2019 vor der Vorlesung per E-Mail an

- Mo 17–19: `Raphael.Kuess@aau.at`
- Di 10–12: `s8seadle@stud.uni-saarland.de`
- Di 14–16: `s9misina@stud.uni-saarland.de`
- Mi 10–12: `s8vinebe@stud.uni-saarland.de`

Vergessen Sie nicht, die Namen Ihrer Gruppenmitglieder in den Text der E-Mail zu schreiben. Die ausführbaren Dateien sollten vor Abgabe gelöscht werden, da andernfalls der Spamfilter der Uni die E-Mail unter Umständen nicht zustellt.