Die Mathematik ist eine Mausefalle. Wer einmal in dieser Falle gefangen sitzt, findet selten den Ausgang, der zurück in seinen vormathematischen Seelenzustand leitet.
Egmont Colerus
(1888-1939, österreichischer Schriftsteller)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Abgabe: Donnerstag, den 14.11.2019, um 14:00 Uhr.

Aufgabe 3.1. (2 + 1 = 3 Punkte)

Betrachten Sie die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 17 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 17 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 1 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 20 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Zerlegung

$$A = CC^\top, \quad C = (l_{ij})_{i,j=1}^5 \in \mathbb{R}^{5\times 5}, \quad c_{ij} = 0 \text{ für } i < j.$$

mittels des Cholesky-Algorithmus.

(b) Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^5$ des Gleichungssystems $Ax = b$ mit der rechten Seite

$$b = (20, -16, 13, 5, 12)^\top.$$

Aufgabe 3.2. (2 + 1 = 3 Punkte)

(a) Der Spektralradius einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist definiert als

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$$

Zeigen Sie: Für jede einer Vektornorm zugeordnete Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Zeigen Sie ferner, dass der euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$ die (wohldefinierte?) Spektralnorm

$$\|A\|_\sigma = \sqrt{\rho(A^*A)}.$$

zugeordnet ist.

(b) Ist die Matrixnorm

$$\|A\|_G = n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

einer Vektornorm zugeordnet?

Aufgabe 3.3. (1.5 + 1.5 = 3 Punkte)

(a) Seien $A, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär und U sei zusätzlich unitär. Zeigen Sie:

$$\kappa_2(AU) = \kappa_2(A),$$

wobei κ_2 die relative Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.

(b) Für unitäre Matrizen U gilt bekanntlich, dass $|\det(U)| = 1$ und $\kappa_2(U) = 1$. Sei M nun eine beliebige quadratische Matrix mit $\det(M) = 1$. Kann man daraus folgern, dass $\kappa_2(M)$ ebenfalls klein ist? Wenn ja, finden Sie eine obere Schranke für $\kappa_2(M)$. Falls nein, geben Sie zu vorgegebenem $\alpha \geq 1$ eine quadratische Matrix M mit $\det(M) = 1$ und $\kappa_2(M) = \alpha$ an.

Aufgabe 3.4. (Programmieraufgabe, 7 Punkte)
In dieser Aufgabe soll die Cholesky-Zerlegung $A = CC^\top$ für symmetrisch positiv definite Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ implementiert werden. Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie ein Grundgerüst für Ihr Programm. Sie kompilieren es mit

```
cc main.c CC.c basic_LinAlg.c -lm
```

(a) Um Speicherplatz zu sparen, wird nur die obere oder untere Hälfte einer symmetrischen Matrix gespeichert. Die Bibliothek `basic_LinAlg` wurde um diese Funktionalität erweitert und in Ihrer Dokumentation finden Sie eine genauere Erläuterung. Vervollständigen Sie die Funktionen

```
long symmat_FrobeniusNorm(...);
void symmat_ausgeben(...);
void symmat_ausgeben_dreieck(...);
void symmat_vektor_mult(...);
```

in der Datei `basic_LinAlg.c`.

(b) Implementieren Sie die Cholesky-Zerlegung in `CC.c`. Die ursprüngliche Matrix A soll dabei durch C überschrieben werden. Schreiben Sie Funktionen für die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution.

(c) Testen Sie Ihre Implementierung, indem Sie das Gleichungssystem

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 29 & 16 & 2 \\ 2 & 16 & 22 & 15 \\ 0 & 2 & 15 & 33 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -30 \\ -5 \\ 67 \end{pmatrix}$$

numerisch lösen. Geben Sie die Dreiecksmatrix C, die Lösung x und die Probe Ax auf dem Bildschirm aus.