Math is like Ophelia in Hamlet - charming and a bit mad.
Alfred North Whitehead
(1861-1947, britischer Philosoph und Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

4. Übungsblatt zur Vorlesung

Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Abgabe: Donnerstag, den 21.11.2019, um 14:00 Uhr.

Aufgabe 4.1. (3 Punkte)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix},$$

indem Sie die QR-Zerlegung von A mittels Householder-Transformationen berechnen. Geben Sie die Matrizen Q und R sowie die Lösung x an.

Aufgabe 4.2. (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)
Die Konditionszahl κ der regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ ist gegeben durch

$$\kappa = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|.$$

Für $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$ definieren wir

$$\tilde{\kappa} = \|A\| \frac{\|x\|}{\|b\|}$$

als Annäherung an κ. Zeigen Sie:

(a) $\tilde{\kappa}$ ist eine untere Schranke, also $1 \leq \tilde{\kappa} \leq \kappa$.

(b) Sei A nun zusätzlich symmetrisch und κ_2 die Konditionszahl in der Spektralnorm $\|\cdot\|_2$. Für welche $b \in \mathbb{R}^n$ ist dann $\tilde{\kappa}_2$ eine gute Näherung an κ_2 bzw. sogar exakt? Für welche b ist die Näherung schlecht?

(c) Bestimmen Sie $\tilde{\kappa}$ bezüglich der Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ am Beispiel der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -k \\ 0 & 1 & -k & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k > 0,$$

für die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Welche Wahl von b_i ist die beste?

Aufgabe 4.3. (3 + 1 = 4 Punkte)

(a) Sei $A = (a_{ij})_{i=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A in der folgenden Menge liegen:

$$M = \bigcup_{i=1}^n K_i \quad \text{mit } K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}| \right\}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Hinweis: Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\|\cdot\|$ eine Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$, die einer Vektornorm auf $\mathbb{C}^n$ zugeordnet ist. Beweisen Sie zunächst, dass jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A, der nicht Eigenwert von B ist, die Abschätzung

$$\left\| (\lambda I - B)^{-1}(A - B) \right\| \geq 1$$

erfüllt.

(b) Überprüfen Sie mithilfe von Teil (a), ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

Aufgabe 4.4. (2.5 + 1.5 = 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch, so gibt es zu jedem Diagonalelement a_{ii} einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A, welcher der Ungleichung

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \left(\sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

genügt.

(b) Bestimmen Sie mittels (a), wie viele Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -14 & 4 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

im Intervall $[5, 9]$ liegen.