Ich stimme mit der Mathematik nicht überein. Ich meine, dass die Summe von Nullen eine gefährliche Zahl ist.
Stanislaw Jerzy Lec
(1909-1966, polnischer Satiriker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Abgabe: Donnerstag, den 05.12.2019, um 14:00 Uhr.

Aufgabe 6.1. (3 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie:

(a) Existiert eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vom Rang $\operatorname{rang}(B) = r$, sodass $A = I + B$ gilt, dann konvergiert das cg-Verfahren in maximal $r + 1$ Schritten.

(b) Besitzt A genau k verschiedene Eigenwerte, so konvergiert das cg-Verfahren in maximal k Schritten.

Aufgabe 6.2. (2 Punkte)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung des cg-Verfahrens. Wählen Sie als Startvektor $x_0 = (0, 0)^\top$.

Aufgabe 6.3. (2.5 + 2.5 = 5 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$.

(a) Zeigen Sie:

$$\lambda_k = \max_{\dim(S)=k} \min_{y\in S\setminus\{0\}} \frac{y^\top Ay}{y^\top y}.$$

(b) Die Signatur von A ist das Tripel $(m, z, p) \in \mathbb{N}_0^3$, wobei m, z und p jeweils die Anzahl an Eigenwerten kleiner als, gleich und größer als null angeben.
Zeigen Sie mittels (a), dass für reguläres $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrizen A und $X^\top AX$ dieselbe Signatur besitzen.

Aufgabe 6.4. (Programmieraufgabe, 1 + 1 + 4 = 6 Punkte)
Wir betrachten das iterative Verfahren

$$B\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + Ax^{(k)} = b, \quad k \geq 0,$$

mit Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Hierbei seien $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^\top$ und $A = L + D + R$, wobei L strikt untere, R strikt obere Dreiecksmatrix und D Diagonalmatrix mit $d_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahren ($B = D$, $\tau = 1$) komponentenweise wie folgt geschrieben werden kann:

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(b) Zeigen Sie, dass das Relaxations-Verfahren ($B = D + \omega L$, $\tau = \omega$) bzw. das Gauß-Seidel-Verfahren ($\omega = 1$) komponentenweise wie folgt geschrieben werden kann:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(c) Implementieren Sie nun das Jacobi- und das Relaxations-Verfahren. Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie ein Grundgerüst für Ihr Programm. Sie kompilieren es mit

```
cc main.c iter.c basic_LinAlg.c -lm
```

Testen Sie Ihre Implementierung am linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 11 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 7 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie $x^{(0)} = (0,0,0,0)^\top$ als Startvektor und geben Sie jeweils $x^{(k)}$ und $Ax^{(k)} - b$ für $k = 20, 40$ und 60 Schritte aus.