Strukturen sind die Waffen der Mathematiker.
Nicolas Bourbaki
(1934, Autorenkollektiv)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

7. Übungsblatt zur Vorlesung

Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Abgabe: Donnerstag, den 12.12.2019, um 14:00 Uhr.

Aufgabe 7.1. (0.5 + 1.5 + 0.5 = 2.5 Punkte)
Für $\gamma \neq 0$ sei

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ die Eigenwerte von A_γ sind bestimmen Sie zugehörige und bezüglich $\|\cdot\|_2$ normierte Eigenvektoren v_1 und v_2.

(b) Die Eigenvektoren von A_γ sollen unter Verwendung der Potenzmethode

$$x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\left\|y^{(k)}\right\|_2}, \quad y^{(k+1)} = Ax^{(k)}, \quad k \geq 0,$$

mit dem Startvektor $x^{(0)} = (1,0)^\top$ berechnet werden. Zeigen Sie, dass die Folge der Iterierten $\left(x^{(k)}\right)_{k=0}^{\infty}$ weder gegen v_1 noch gegen v_2 konvergiert. Welche Voraussetzung für die Konvergenz ist nicht erfüllt?

(c) Betrachten Sie die Folge der Rayleigh-Quotienten

$$\varrho_k = \left\langle Ax^{(k)}, x^{(k)} \right\rangle, \quad k \geq 0,$$

für die Iterierten $x^{(k)}$. Zeigen Sie $\varrho_{2k} = \lambda_1 = 1$ für alle $k \geq 0$.

Aufgabe 7.2. (1.5 + 1.5 = 3 Punkte)
Von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

soll der mittlere Eigenwert und ein dazugehöriger Eigenvektor näherungsweise bestimmt werden.

(a) Schätzen Sie die Lage der Eigenwerte mithilfe von Aufgabe 4.4 ab.

(b) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zum mittleren Eigenwert durch zwei Schritte einer geeigneten Vektoriteration, ausgehend vom Startwert $(1,0,0)^\top$, und eine Näherung an den gesuchten Eigenwert mithilfe des Rayleigh-Quotienten.

Aufgabe 7.3. (4.5 Punkte)
Sei $n \geq 2$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann existiert die Schur-Zerlegung

$$Q^\top AQ = D = \mathrm{diag}(\lambda_i), \quad |\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

mit orthogonalem $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für $1 \leq r < n$ mit $|\lambda_r| > |\lambda_{r+1}|$ unterteilen wir Q und D in

$$Q = \begin{pmatrix} Q_\alpha & Q_\beta \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_\alpha & 0 \\ 0 & D_\beta \end{pmatrix}$$

mit $Q_\alpha \in \mathbb{R}^{n\times r}$ und $D_\alpha \in \mathbb{R}^{r\times r}$. Dann ist das Bild von Q_α,

$$D_r(A) = \mathrm{Im}(Q_\alpha),$$

der invariante Untervektorraum bezüglich $\lambda_1 \dots, \lambda_r$. Die Methode der simultanen Iteration

---

$Q_0 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ mit orthonormalen Spalten gegeben
for $k = 1, 2, \dots$ **do**
  $Z_k = AQ_{k-1}$
  $Q_k R_k = Z_k$ ▷ QR Zerlegung
end for

---

erzeugt eine Folge von Matrizen $\{Q_k\} \subset \mathbb{R}^{n\times r}$. Sei d_k definiert durch

$$d_k = \mathrm{dist}(D_r(A), \mathrm{Im}(Q_k)), \quad k \geq 0.$$

Zeigen Sie nun, dass die Folge der Unterräume $\mathrm{Im}(Q_k)$ gegen $D_r(A)$ im Sinne von

$$d_k \leq \frac{d_0}{\sqrt{1-d_0^2}} \left| \frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r} \right|^k$$

konvergiert, falls $d_0 < 1$ gilt.
Hinweis: Der Abstand zwischen zwei Unterräumen S_1 und S_2 von Dimension r ist definiert durch

$$\mathrm{dist}(S_1, S_2) = \|P_1 - P_2\|_2,$$

wobei P_i die orthogonale Projektion auf S_i ist.

Aufgabe 7.4. (Programmieraufgabe, 6 Punkte)
In dieser Aufgabe soll die Methode der konjugierten Gradienten für dünnbesetzte Matrizen implementiert werden. Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie ein Grundgerüst für Ihr Programm. Sie kompilieren es mit

```
cc main.c basic_LinAlg.c cg.c -lm
```

(a) Das *compressed sparse row* (CSR) Format für dünnbesetzte Matrizen besteht aus drei Vektoren:

- Dem Vektor `values`, der die Einträge ungleich null in row-major Reihenfolge enthält.
- Dem Vektor `columns`, der die Spaltenindices der Elemente von `values` angibt.
- Dem Vektor `rowIndex`, dessen i-ter Eintrag die Position des ersten Eintrags ungleich null in der i-ten Zeile der Matrix in `values` angibt.

Implementieren Sie in `basic_LinAlg.c` die Funktion `SparseMatrix_vektor_mult` für dünnbesetzte Matrizen im CSR-Format.

(b) Realisieren Sie nun in der Funktion `cg_sparse()` das cg-Verfahren für dünnbesetzte Matrizen. Das Verfahren soll abbrechen, sobald die maximale Iterationszahl oder die Abbruchgenauigkeit für das Residuum

$$\frac{\|r_{m+1}\|}{\|r_0\|} = \frac{\|Ax_{m+1} - b\|}{\|Ax_0 - b\|} < \varepsilon, \quad m \geq 0,$$

erreicht wurde. Testen Sie Ihre Implementierung am Gleichungssystem $Ax = b$ mit den Daten aus `A.dat`, `b.dat` und `x.dat`. Setzen Sie die maximale Anzahl an Schritten auf 100 und geben Sie alle zehn Schritte das relative Residuum und den relativen Fehler

$$e_{m+1} = \frac{\|x_{m+1} - x\|}{\|x\|}$$

auf der Konsole aus. Wie viele Schritte sind notwendig, damit das relative Residuum kleiner als $\epsilon = 10^{-12}$ wird?