In mathematischen Fragen darf man sich auch über den kleinsten Fehler nicht hinwegsetzen.
Isaac Newton, (1643-1727) englischer Mathematiker, Physiker und Astronom

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Abgabe: Donnerstag, den 19.12.2019, um 14:00 Uhr.

Aufgabe 8.1. (2 + 1.5 = 3.5 Punkte)
Seien $m < n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $\operatorname{rang}(A) = m$.

(a) Bestimmen Sie zu $x \in \mathbb{R}^n$ den Punkt $Px \in \operatorname{Im}(A)$, der minimalen Abstand zu x hat, also

$$\|x - Px\|_2 = \min_{y\in\operatorname{Im}(A)} \|x - y\|_2 \tag{1}$$

erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass die durch (1) definierte Abbildung $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $x - Px \perp \operatorname{Im}(A)$,
(ii) $P^2 = P$,
(iii) und $P^\top = P$.

Aufgabe 8.2. (1.5 + 1 + 2 = 4.5 Punkte)
In Aufgabe 8.1 wird gezeigt, dass das Minimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^m} \|Ax - b\|_2\,, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times m}, b \in \mathbb{R}^n,$$

äquivalent ist zur Lösung der Normalengleichung

$$A^\top Ax = A^\top b.$$

(a) Sei $m \leq n$ und $\operatorname{rang}(A) = m$. Dann ist $A^\top A$ regulär und die Lösung ist gegeben durch $x = A^+b$, wobei

$$A^+ = (A^\top A)^{-1} A^\top$$

die sogenannte pseudoinverse Matrix von A ist. Drücken Sie A^+ mithilfe der Singulärwertzerlegung von A aus.

(b) Definieren Sie die Matrix A^+ entsprechend für den Fall, dass m, n beliebig sind und $\operatorname{rang}(A) = r \leq \min(n, m)$ gilt. Zeigen Sie, dass A^+b eine Lösung des obigen Minimierungsproblems ist.

(c) Zeigen Sie, dass $x_* = A^+b$ unter allen Lösungen des Minimierungsproblems die kleinste euklidische Norm besitzt.

Aufgabe 8.3. (3 Punkte)
Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \\ 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8.4. (Programmieraufgabe, 5 Punkte)
In dieser Aufgabe soll die Potenzmethode sowie der klassische QR-Algorithmus implementiert werden. Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie ein Grundgerüst für Ihr Programm. Sie kompilieren es mit

```
cc main.c basic_LinAlg.c QR.c LR.c -lm
```

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $6, 4, 4, 2$.

(a) Schreiben Sie ein Hauptprogramm, das die Potenzmethode mit direkter sowie inverser Iteration realisiert, um den größten und kleinsten Eigenwert von A zu berechnen. Führen Sie die Algorithmen nun mit jeweils 20 Iterationsschritten aus und visualisieren Sie die Approximationen an die Eigenwerte (zum Beispiel mit `gnuplot`).

(b) Implementieren Sie den QR-Algorithmus, um alle Eigenwerte simultan zu berechnen. Führen Sie den Algorithmus wieder mit 20 Iterationsschritten aus und visualisieren Sie die Approximationen an die Eigenwerte.