*Er ist Mathematiker, also hartnäckig.*
Johann Wolfgang von Goethe (1749– 1832),
deutscher Dichter

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

## 9. Übungsblatt zur Vorlesung

# Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Abgabe: Donnerstag, den 09.01.2020, um 14:00 Uhr.

**Aufgabe 9.1. (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)**
Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zu den folgenden Stützstellen

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f_i$ | 1 | 3 | 2 | 4 |

mittels

(a) Lagrange-Interpolation,

(b) Neville-Schema und

(c) Newton-Interpolation.

Fügen Sie anschließend der obigen Tabelle den Stützpunkt $(x_4, f_4) = (6, 6)$ hinzu und wiederholen Sie die Aufgabenstellung für die erweiterte Tabelle.

**Aufgabe 9.2. (1 + 0.5 + 1 = 2.5 Punkte)**
Sei $a < b$ und $f$ eine Funktion auf dem Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Betrachten Sie für paarweise verschiedene Stützstellen $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$ das Interpolationspolynom

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \quad \text{mit } L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

(a) Zeigen Sie: Für alle stetigen $f \in C(I)$ erfüllt das Interpolationspolynom die Abschätzung

$$\|p_n\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty$$

mit der Maximumnorm $\|f\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x)|$ und der Lebesgue-Konstanten

$$\Lambda_n = \left\| \sum_{i=0}^{n} |L_i| \right\|_\infty .$$

Konstruieren Sie außerdem ein $f \in C(I)$, sodass die Ungleichung scharf ist.

(b) Bestimmen Sie die absolute Konditionszahl $\kappa_{\text{abs}}$ der Interpolationsaufgabe auf $C(I)$.

(c) Sei $\mathcal{P}_n(I)$ der Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich $n \in \mathbb{N}_0$ auf $I$. Beweisen Sie für $f \in C(I)$ die Abschätzung

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{m \in \mathcal{P}_n(I)} \|f - m\|_\infty .$$

**Aufgabe 9.3. (0.5 + 0.5 + 2 = 3 Punkte)**
Die Bernsteinpolynome sind für $i \in \{0, \dots, n\}$ durch

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i}(1-x)^{n-i}x^i, \quad x \in \mathbb{R},$$

definiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $x \in [0,1]$ gilt $B_i^n(x) \geq 0$ und $\sum_{i=0}^n B_i^n(x) = 1$.

(b) Die Funktionen $B_i^n$ genügen der Rekursionsformel

$$B_i^n(x) = xB_{i-1}^{n-1}(x) + (1-x)B_i^{n-1}$$

für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und $x \in \mathbb{R}$.

(c) Die Funktionen $B_i^n$, $i \in \{0, \dots, n\}$, bilden eine Basis des Polynomraums $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

**Aufgabe 9.4. (Programmieraufgabe, 2 + 2 = 4 Punkte)**
In dieser Aufgabe implementieren Sie das Neville-Schema. Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie ein Grundgerüst für Ihr Programm. Sie kompilieren es mit

```
cc main.c basic_LinAlg.c -lm
```

Die Werte $f_i$ und Stützstellen $x_i$ der zu interpolierenden Funktion $f$ liegen in der Datei `daten.dat` im folgenden Format vor:

```
2   n+1
x_0 x_1 x_2 ... x_n
f_0 f_1 f_2 ... f_n
```

(a) Schreiben Sie eine Funktion `phi(long i, long k, ...)`, die die Werte $\varphi_{ik}$ aus dem Neville-Schema berechnet.

(b) Visualisieren Sie das Interpolationspolynom mit `gnuplot` auf dem Intervall $[a, b]$, wobei $a =$`x_0` und $b =$`x_n`. Verwenden Sie hierzu eine Hilfsdiskretisierung in 80 gleichgroße Teilintervalle. Fügen Sie außerdem die Punkte `(x_i,f_i)` in Ihren Plot ein.

**Aufgabe 9.5. (Bonusaufgabe, 4 Punkte)**
Für eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist das assoziierte Bernsteinpolynom durch

$$B_f^n(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i(1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

definiert. Zeigen Sie, dass eine Folge von assoziierten Bernsteinpolynomen existiert, die auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.